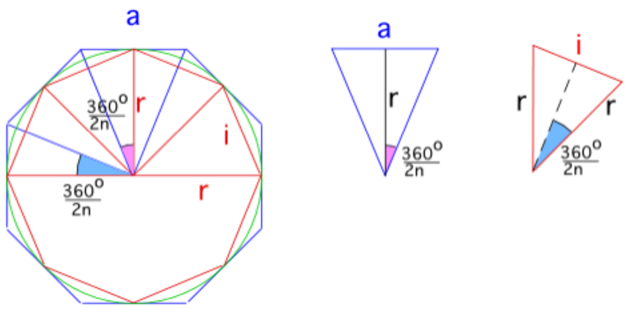
Die Zahl π

Mit welcher Zahl muss man den Durchmesser d=2r eines Kreises multiplizieren, wenn man den Umfang U des Kreises bestimmen will?
Aus der Berechnung des Umfanges eines n-Ecks kann die Zahl π bestimmt werden. Wir betrachten dazu ein Achteck und erweitern die Betrachtung anschliessend auf ein allgemeines n-Eck.
Das blaue n-Eck hat einen Umfang, der grösser ist als der Umfang des grünen Kreises. Dagegen ist der Umfang des roten n-Ecks kleiner als der Umfang des grünen Kreises. Der Umfang des Kreises liegt also zwischen dem Umfang des blauen und des roten n-Ecks.



Berechnen wir die Grundseite a und i der beiden Dreiecke:

$$\frac{\frac{i}{2}}{r} = \sin\frac{360^0}{16} \quad \Rightarrow \quad i = 2r\cdot\sin\frac{360^0}{16}$$

$$\frac{\frac{a}{2}}{r} = \tan\frac{360^0}{16} \quad \Rightarrow \quad a = 2r\cdot\tan\frac{360^0}{16}$$

Bezeichnet man den Umfang des Kreises mit U, dann gilt in einem 8 Eck:

$$\boxed{\begin{array}{llcl} n=8: \Rightarrow & 8\cdot i & \le U \le & 8\cdot a \\ & 8\cdot\left(2r\cdot\sin\frac{360^0}{16}\right) & \le U \le & 8\cdot\left(2r\cdot\tan\frac{360^0}{16}\right) \\ & 2r\cdot 3{,}06147 & \le U \le & 2r\cdot 3{,}31371 \end{array}}$$

Der Umfang eines n-Ecks

Erweitern wir n, dann können wir für jedes n-Eck den Umfang U eingrenzen. Wir bezeichnen die Seite des einbeschriebenen n-Ecks mit i und die Seitenlänge des umschriebenen n-Ecks mit a.

$$n\cdot i \le U \le n\cdot a \qquad mit: \quad \frac{i/2}{r} = \sin\left(\frac{360^0}{2\cdot n}\right) \qquad Dreieck\ innen$$

$$\frac{a/2}{r} = \tan\left(\frac{360^0}{2\cdot n}\right) \qquad Dreieck\ aussen$$

Damit folgt:

$$\boxed{2r\cdot n\cdot\sin\left(\frac{360^0}{2\cdot n}\right) \le U \le 2r\cdot n\cdot\tan\left(\frac{360^0}{2\cdot n}\right)}$$

Berechnen wir für $n=10^9$ den Umfang:

$$n=10^9: \quad \Rightarrow \quad 2r\cdot 10^9\cdot\sin\frac{360^0}{2\cdot 10^9} \le U \le 2r\cdot 10^9\cdot\tan\frac{360^0}{2\cdot 10^9}$$

$$\Rightarrow \quad 2r\cdot 3{,}1415927 \le U \le 2r\cdot 3{,}1415927$$

Die Bestimmung der Zahl π und des Umfangs des Kreises

Daraus ist ersichtlich, dass die Zahl $\pi \approx 3{,}1415927 \pm 5\cdot 10^{-8}$ beträgt. Die Erhöhung von n schliesslich führt auf den Wert von π

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} n\cdot\sin\left(\frac{360^0}{2\cdot n}\right) = \pi} \qquad \text{und} \qquad \boxed{\lim_{n\to\infty} n\cdot\tan\left(\frac{360^0}{2\cdot n}\right) = \pi}$$

Daraus folgt aber der Umfang eines Kreises mit $\boxed{U = 2\pi\cdot r}$