

# Wechselstrom

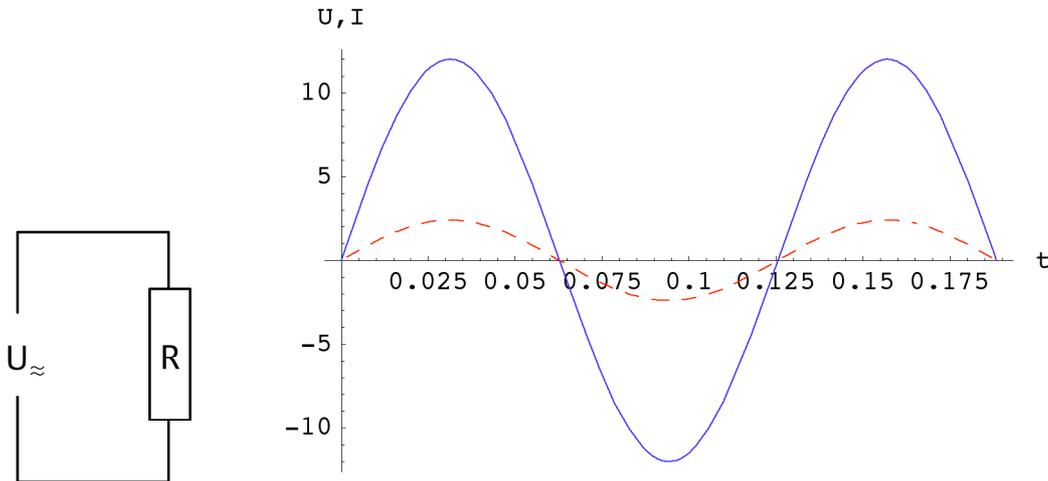
Dr. F. Raemy

Wechselspannung und Wechselstrom können stets wie folgt dargestellt werden :

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_U) \quad ; \quad I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_I)$$

## 1 Widerstand im Wechselstromkreis

Phasenverschiebung:  $\Delta\varphi = \varphi_U - \varphi_I = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_I = \varphi_U$



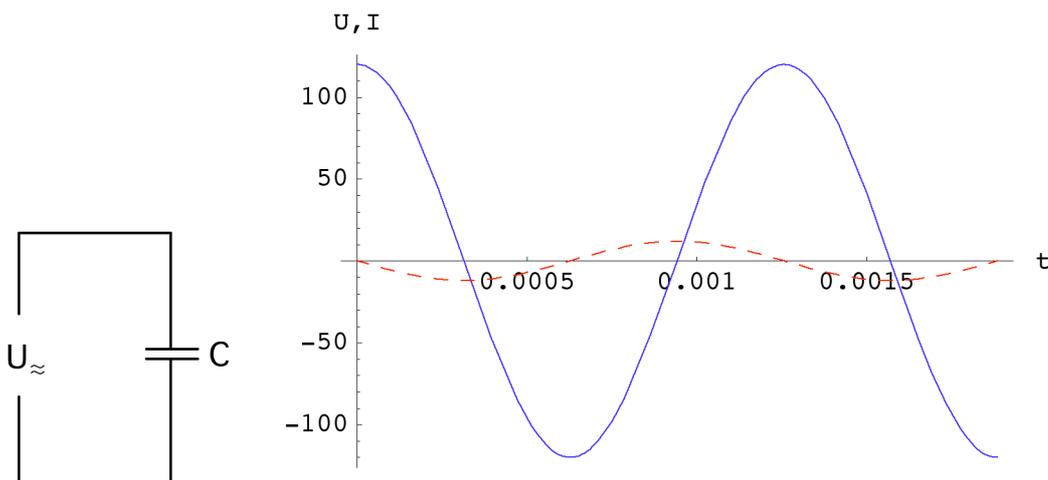
$$U_{\approx} = R \cdot I_{\approx}$$

$$I(t) = I_0 \sin(\omega \cdot t)$$

$$\Rightarrow U(t) = R \cdot I_0 \sin(\omega \cdot t) \quad \Rightarrow \underline{\underline{U_0 = R \cdot I_0}}$$

## 2 Kapazität im Wechselstromkreis

Phasenverschiebung:  $\Delta\varphi = \varphi_U - \varphi_I = -\frac{\pi}{2}$



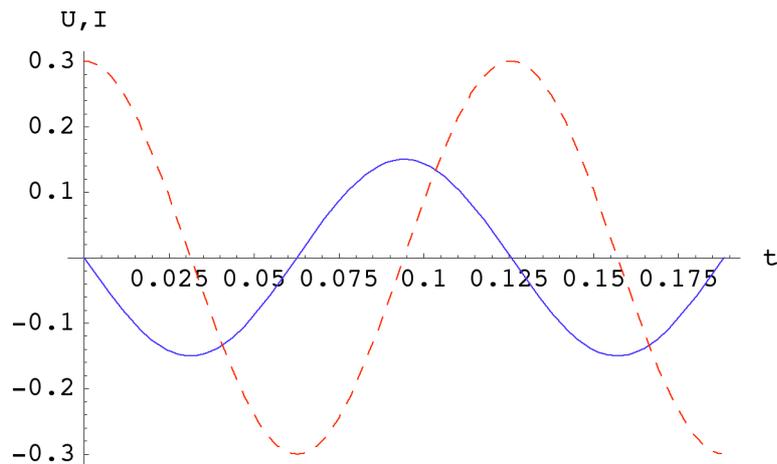
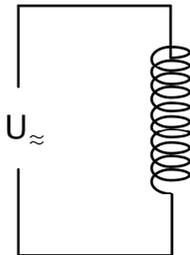
$$\frac{dQ}{dt} = I_{\approx} = I(t) = C \frac{dU}{dt}$$

$$U(t) = U_0 \cos(\omega \cdot t) = U_0 \sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow I(t) = -C \cdot \omega \cdot U_0 \sin(\omega \cdot t) = -I_0 \sin(\omega \cdot t) = I_0 \sin(\omega \cdot t + \pi) \quad \Rightarrow \underline{\underline{R_C = \frac{1}{\omega \cdot C}}}$$

### 3 Induktivität im Wechselstromkreis

Phasenverschiebung:  $\Delta\varphi = \varphi_U - \varphi_I = \frac{\pi}{2}$



$$U(t) = L \frac{dI}{dt} \quad [L] = \frac{Vs}{A} = H$$

$$I(t) = I_0 \sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}) = I_0 \cos(\omega \cdot t)$$

$$\Rightarrow U(t) = L \cdot \omega \cdot I_0 \cos(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}) = U_0 \sin(\omega \cdot t + \pi) \quad \Rightarrow \underline{\underline{R_L = \omega \cdot L}}$$

#### ZUSAMMENFASSUNG

**Wechselspannung:**  $U = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi_U); U_{eff} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}; \hat{U}, \hat{I} : \text{Scheitelwerte}$

**Wechselstrom:**  $I = \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_I); I_{eff} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}; U_{eff}, I_{eff} : \text{Effektivwerte}$

**effektive Leistung**  $P = UI \cos(\varphi_I - \varphi_U) = U_{eff} I_{eff} \cos(\varphi_I - \varphi_U)$

**Impedanz eines Widerstandes R:**  $Z = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{U}{I} = R$

**Impedanz einer Kapazität C**  $Z = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{U}{I} = \frac{1}{\omega \cdot C}$

**Impedanz einer Spule**  $Z = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{U}{I} = \omega \cdot L \quad L : \text{Induktivität}$

## 4 Resonanzkreise

### 4.1 Serienresonanz

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad ; \quad \tan(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

### 4.2 Parallelresonanz

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad ; \quad \tan(\varphi_1 - \varphi_2) = R \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)$$

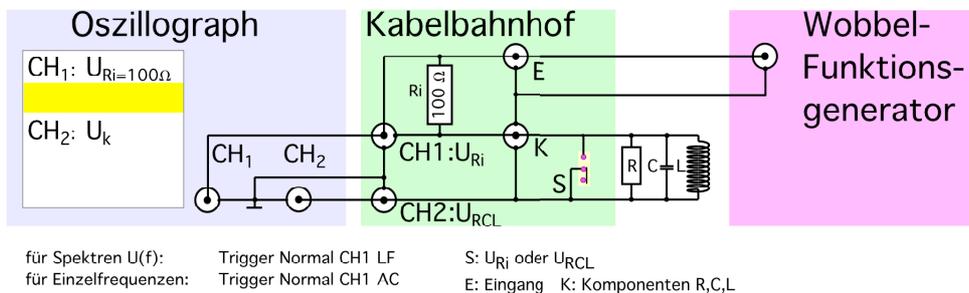
### 4.3 Resonanzfrequenz des ungedämpften Schwingkreises

$$f_{res} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

## 5 DAS WECHSELSTROMVERHALTEN VON WIDERSTAND, KAPAZITÄT UND INDUKTIVITÄT

### 5.1 Experimente:

Wir betrachten den folgenden Versuchsaufbau und führen für R, C und L diesen Versuch drei Mal durch, um das Verhalten der Elemente bei verschiedenen Frequenzen zu erfahren.



### 5.2 Beschreibung

Der Wobbel-Funktionsgenerator erzeugt Schwingungen, deren Frequenz man von Hand einstellen kann oder deren Frequenz proportional zur Zeit ansteigen. Im ersten Fall können Amplituden für eine bestimmte Frequenz verglichen werden, im zweiten Fall kann das Frequenzverhalten der drei Elemente R, C und L studiert werden. Das Signal des Wobbel-Frequenzgenerators wird am Eingang E auf den Kabelbahnhof geschaltet. Der Anschluss K wird für die externen Komponente R, C oder L verwendet.

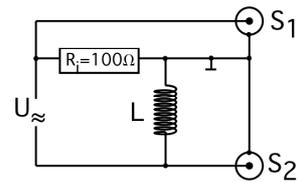
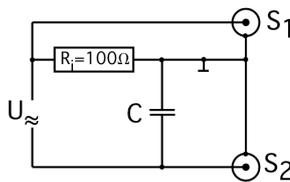
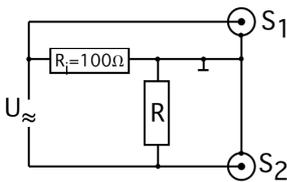
### 5.3 Der Schalter S

Der Schalter S ermöglicht in der ersten Position die Messung der Spannung am Innenwiderstand  $R_i = 100 \Omega$  ohne die Komponenten am Anschluss K. Der Anschluss K ist kurzgeschlossen.

In der zweiten Schalterstellung wird auf dem Kanal 1 (CH 1) die Spannung über dem Widerstand  $R_i = 100 \Omega$  zugänglich, die proportional zum Strom durch den Innenwiderstand und somit auch zum

Strom in R, C und L ist. Ist die Wobelfrequenz ausgeschaltet, wird die konstante Frequenz aus einem Frequenzmesser abgelesen oder aus der Periode der Schwingung am Oszillographen bestimmt.

Damit ergibt sich das prinzipielle Schaltbild jeweils für R, C und L:

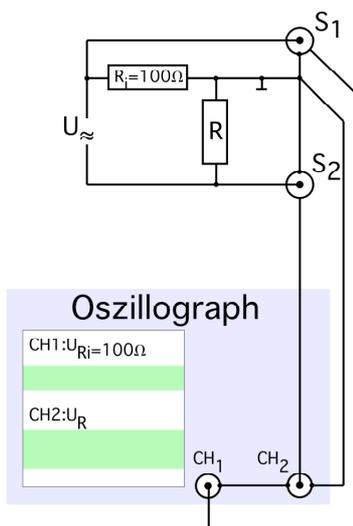


## 5.4 Die Messung von R, L und C

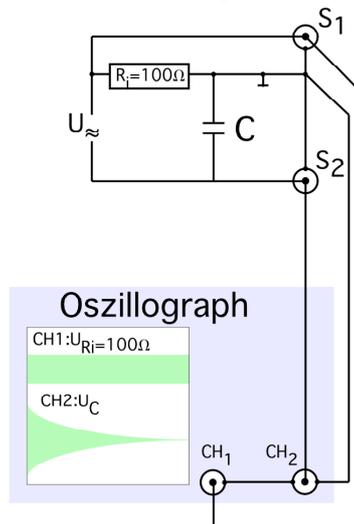
Wir schalten den Trigger des Oszillographen auf im Falle einer Spektralmessung auf TRIGGER NORMAL, CH 1, LF. Die Anfangsfrequenz  $F_1$  die Endfrequenz  $F_2$  und die Sweeprate SR werden am Frequenzgenerator in dieser Reihenfolge eingestellt. Die Sweeprate SR bestimmt die Zeit pro Einheit auf dem Oszillographen. Bei einer SR = 1 muss die Zeit pro Einheit auf 0.1 s eingestellt werden. Dann ist pro Sweep das gesamte Spektrum mit Anfangsfrequenz  $F_1$  und Endfrequenz  $F_2$  sichtbar.

### 5.4.1 Beobachtungen

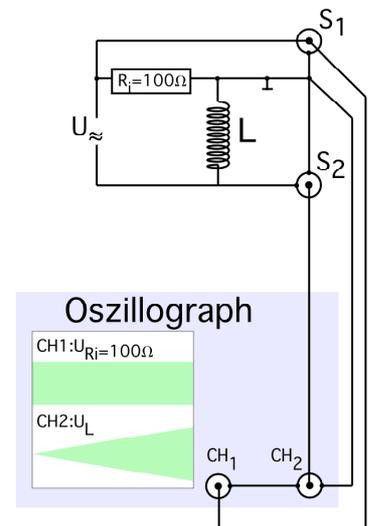
1) An K ein Widerstand



2) An K eine Kapazität



3) An K eine Induktivität



### 5.4.2 Beschreibung des Zusammenhanges U und I

$$U_R = R \cdot I_R$$

$$Q = C \cdot U$$

$$\frac{dQ}{dt} = I_C = C \cdot \frac{dU}{dt}$$

$$U_L = L \cdot \frac{dI}{dt}$$

daraus folgt:

$$U_R = R \cdot I_R$$

$$I_R(f) = \text{konst}$$

$$\Rightarrow U_R(f) = \text{konst}$$

$$U_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot I_C$$

$$I_C(f) = \text{konst}$$

$$\Rightarrow U_C(f) \propto \frac{1}{f}$$

$$U_L = \omega \cdot L \cdot I_L$$

$$I_L(f) = \text{konst}$$

$$\Rightarrow U_L(f) \propto f$$

Damit können aus den Amplituden-Messungen des Oszillographen die Proportionalitätskonstanten R, C und L bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
 I_R &= I_{R_i} = I_0 \sin(\omega t) \\
 U_R &= R I_{0_R} \sin(\omega t) \\
 U_{0_R} &= R I_{0_R} \wedge U_{0_{R_i}} = R_i \cdot I_{0_{R_i}} \\
 I_{0_{R_i}} &= I_{0_R} \\
 \Rightarrow \frac{U_{0_R}}{U_{0_{R_i}}} &= \frac{R}{R_i} \\
 R &= \frac{U_{0_R}}{U_{0_{R_i}}} R_i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_C(t) &= U_{0_C} \sin(\omega t) \\
 \Rightarrow I_C(t) &= U_{0_C} \omega \cdot C \cos(\omega t) \\
 \Rightarrow I_{0_C} &= U_{0_C} \omega \cdot C \\
 I_{0_C} &= I_{0_{R_i}} \\
 \Rightarrow I_{0_{R_i}} &= \frac{U_{0_{R_i}}}{R_i} = U_{0_C} \omega \cdot C \\
 C &= \frac{U_{0_{R_i}}}{U_{0_C} \cdot R_i \cdot \omega} = \frac{U_{0_{R_i}}}{U_{0_C} \cdot R_i \cdot 2\pi \cdot f}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I(t) &= I_0 \sin(\omega \cdot t) \\
 \Rightarrow U(t) &= L I_{0_L} \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \\
 \Rightarrow U_{0_{sp}} &= L \cdot I_{0_L} \cdot \omega \\
 I_{0_L} &= I_{0_{R_i}} \\
 \Rightarrow I_{0_{R_i}} &= \frac{U_{0_{R_i}}}{R_i} = L \cdot I_{0_L} \cdot \omega \\
 L &= \frac{U_{0_L} \cdot R_i}{U_{R_i} \cdot \omega} = \frac{U_{0_L} \cdot R_i}{U_{R_i} \cdot 2\pi \cdot f}
 \end{aligned}$$

### 5.4.3 Beispiele: Messung R, C und L durch Spannungs- und Frequenzmessung

Widerstandsbestimmung  
Nominalwert: 50 Ω

$$\begin{aligned}
 \forall f \\
 U_{0_{R_i}} &= 1,0 \text{ V} \\
 U_{0_R} &= 0,5 \text{ V} \\
 R_i &= 100 \Omega \\
 \Rightarrow R &= \frac{U_{0_R}}{U_{0_{R_i}}} R_i = \underline{\underline{50 \Omega}}
 \end{aligned}$$

Kapazitätsbestimmung:  
Nominalwert 100 nF

$$\begin{aligned}
 f &= 20 \text{ kHz} \\
 U_{0_{R_i}} &= 5,35 \cdot 0,5 \text{ V} \\
 U_{0_C} &= 4,3 \cdot 0,5 \text{ V} \\
 R_i &= 100 \Omega \\
 \Rightarrow C &= \frac{U_{0_{R_i}}}{U_{0_C} R_i \omega} = \underline{\underline{99,9 \text{ nF}}}
 \end{aligned}$$

Induktivitätsbestimmung

$$\begin{aligned}
 f &= 225 \text{ kHz} \\
 U_{0_{R_i}} &= 2,85 \text{ V} \\
 U_{0_L} &= 1,7 \text{ V} \\
 R_i &= 100 \Omega \\
 \Rightarrow L &= \frac{U_{0_L} R_i}{U_{0_{R_i}} \omega} = \underline{\underline{4,2 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Vs}}{\text{A}}}}
 \end{aligned}$$

## 6 Kombinationen von Kapazität und Induktivität und Messung der Resonanzfrequenz

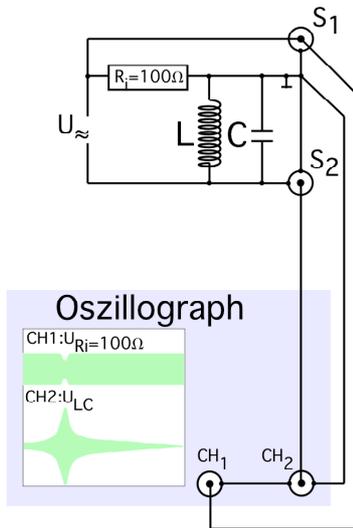
### 6.1 Versuchsaufbau

Parallelschaltung einer Kapazität und einer Induktivität: Die Resonanzfrequenz kann direkt aus der Oszillographen - Darstellung abgelesen werden, wenn die maximale Frequenz  $F_2$  des Sweep-Generators bekannt ist.

Es werden jedoch wesentlich genauere Resultate erzielt, wenn die Resonanzfrequenz durch den direkten Vergleich beider Signale Kanal 1 und Kanal 2 mit Hilfe der Lissajous-Figur erfolgt. Im Resonanzfall gilt, dass die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung gleich Null ist. Weil die Lissajous-Figur sehr sensibel auf Veränderungen der Phasenlage reagiert, drängt sich diese Methode geradezu auf, um die Resonanzfrequenz genau zu bestimmen.

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad \Rightarrow f_{res} = \frac{1}{(2\pi)^2 \sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi = 0$$

Im Resonanzfall gilt für die Lissajous-Figur, dass diese eine schiefe Gerade im x-y-System des Oszillographen ist. Die manuelle Einstellung der Frequenz auf diese Situation ist sehr einfach.



Bestimmung der Resonanzfrequenz und daraus die Kapazität C oder Induktivität L:

$$f_{res} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{(2\pi)^2 f^2 \cdot L} \quad \vee \quad L = \frac{1}{(2\pi)^2 f^2 \cdot C}$$

## 6.2 Vorgehen

Der Wobbel-Frequenzgenerator wird auf Wobbeln gestellt und kontrolliert, ob im Bereich zwischen der Anfangsfrequenz  $F_1$  und Endfrequenz  $F_2$  ein Maximum der Amplitude auf dem Oszillographen sichtbar ist. Wenn eine Resonanz auftritt, dann wird die Wobbelfunktion ausgeschaltet und manuell die beobachtete Resonanzfrequenz unter zu Hilfenahme der Lissajous-Figur eingestellt. Die Lissajous-Figur zeigt im Resonanzfall eine schiefe Gerade.

## 6.3 Auditiver Vergleich Computersignal und analog erzeugtes Signal

Es ist hinreichend bekannt, dass das Ohr ein idealer Frequenzanalysator ist. Wir ersetzen die Rogowskispule durch einen Lautsprecher. Wir wollen uns das Ohr als Messorgan zu Nutze machen. Wir vergleichen die Frequenz aus der analogen Schaltung mit der Frequenz, aus dem Computer. Die Resonanzfrequenz gibt eine typische Schwebung.