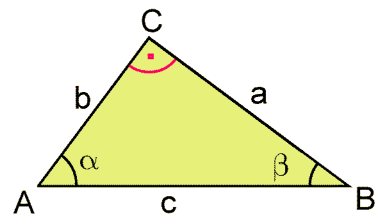
1 Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck

Formeln und Tafeln Seite 52, Fundamentum Seite 26, Formeln, Tabellen, Begriffe FTB Seite 93



1.1 Definitionen

a ,b sind die Katheten, c ist die Hypotenuse, wenn $\boxed{\gamma = 90^0}$ ist.

1.1.1 Der Sinus eines Winkels

$\boxed{\sin\alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$ $\qquad$ $\boxed{\sin\beta = \frac{b}{c}}$

Beispiel 1:

gegeben :	$a = 7;\ c = 14;\ \gamma = 90^0$		*gesucht :*	α
Lösung :	$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$	$\Rightarrow \alpha = \arcsin\frac{1}{2} = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$		$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 30^0}}$

Beispiel 2:

gegeben :	$a = 10;\ \sin\alpha = 0{,}2;\ \gamma = 90^0$		*gesucht :*	$\alpha;\ c$
Lösung :	$\sin\alpha = \frac{a}{c}$	$\Rightarrow 0{,}2 = \frac{10}{c}$	$\Rightarrow c = \frac{10}{0{,}2}$	$\Rightarrow \underline{\underline{c = 50}}$
	$\sin\alpha = 0{,}2$	$\Rightarrow \alpha = \arcsin(0{,}2) = \sin^{-1}(0{,}2)$		$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 11{,}54^0}}$

1.1.2 Der Kosinus eines Winkels

$\boxed{\cos\alpha = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$ $\qquad$ $\boxed{\cos\beta = \frac{a}{c}}$

Beispiel

gegeben :	$b = 15;\ c = 20; \gamma = 90^0$		*gesucht :*	α
Lösung :	$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$	$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{3}{4}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$		$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 41{,}41^0}}$

1.1.3 Der Tangens eines Winkels

$\boxed{\tan\alpha = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}} = \frac{a}{b}$ $\qquad$ $\boxed{\tan\beta = \frac{b}{a}}$

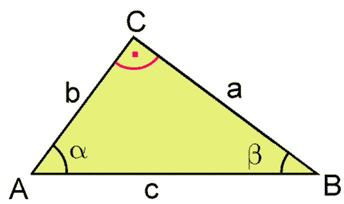
Beispiel:

gegeben :	$\alpha = 60^0;\ a = 12;\ \gamma = 90^0$		*gesucht :*	b
Lösung :	$\tan\alpha = \frac{a}{b}$	$\Rightarrow \tan 60^0 = \frac{12}{b}$	$\Rightarrow b = \frac{12}{\tan 60^0}$	$\Rightarrow \underline{\underline{b = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93}}$

1.2 Beispiele

a) In einem rechtwinkligen Dreieck beträgt $a = 10; c = 15$

Berechnen Sie α , β , b und die Fläche des Dreiecks F_Δ .



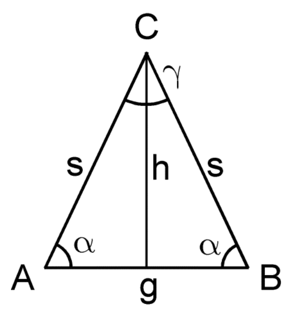
1) $\sin\alpha = \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \sin\alpha = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) \quad \Rightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 41{,}81^0}}$

2) $\beta = 90^0 - \alpha \quad \Rightarrow \underline{\underline{\beta \approx 48{,}19^0}}$

3) $\cos\alpha = \frac{b}{c} \quad \Rightarrow b = c\ \cos\alpha \approx 15\ \cos\left(41{,}81^0\right) \quad \Rightarrow \underline{\underline{b \approx 11{,}18}}$

4) $F_\Delta = \frac{1}{2}ab \approx \frac{1}{2}\cdot 10 \cdot 11{,}18 \quad \Rightarrow \underline{\underline{F_\Delta \approx 55{,}90}}$

b) In einem gleichschenkligen Dreieck beträgt $s = 20\ cm$; $\sin\alpha = 0{,}7$. Berechnen Sie h, γ und g.



1) $\sin\alpha = \frac{h}{s} \qquad h = s\ \sin\alpha \quad \Rightarrow \underline{\underline{h = 14\ cm}}$

2) $\gamma = 180^0 - 2\alpha \quad \Rightarrow \underline{\underline{\gamma \approx 91{,}15^0}}$

3) $\cos\alpha = \frac{g/2}{s} \quad \Rightarrow g = 2s\cos\alpha \quad \Rightarrow \underline{\underline{g \approx 28{,}56\ cm}}$

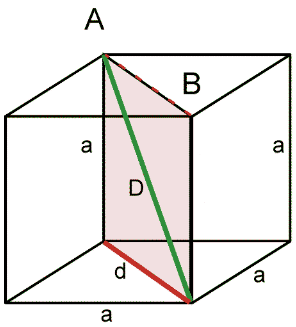
Lösen Sie nun die Aufgaben 3, 4, 5, 8, 9, 12 und 14 der Serie 8

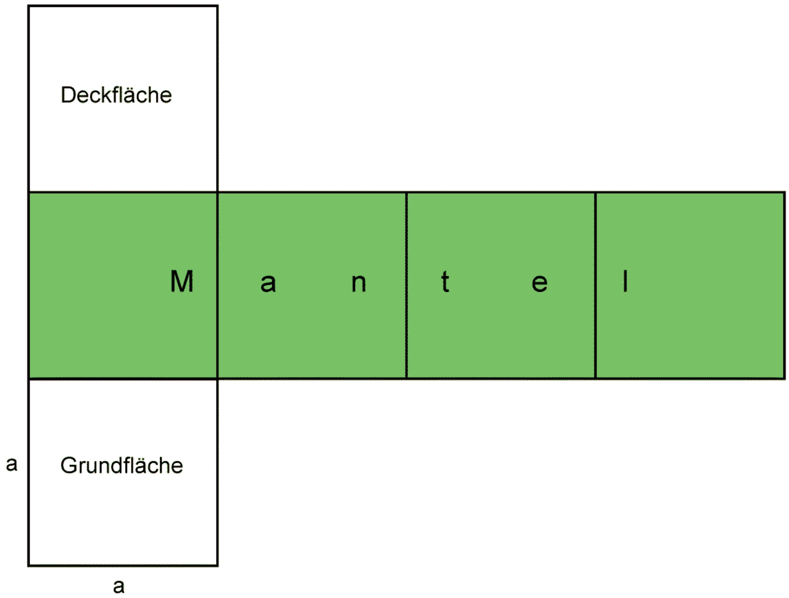
2 Stereometrie (Körper)

Formeln und Tafeln S. 59, Fundamentum Seite 30 ff, Formeln, Tabellen, Begriffe FTB Seite 93 ff

2.1 Die Prismen

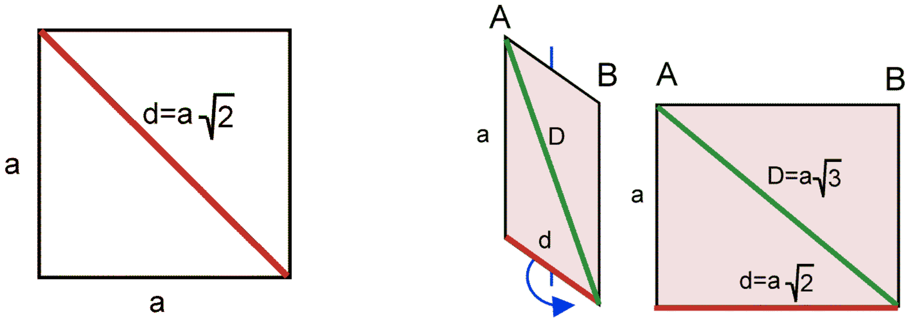
2.1.1 Der Würfel





Definitionen: a = Kante; d = Flächendiagonale; D = Körperdiagonale

2.1.1.1 Formeln



Flächendiagonale: $d^2 = a^2 + a^2 \quad \Rightarrow \quad d^2 = 2a^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{d = a\sqrt{2}}}$

Körperdiagonale: $D^2 = a^2 + d^2 \quad \Rightarrow \quad D^2 = 3a^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{D = a\sqrt{3}}}$

Diagonalschnitt: $F = a\sqrt{2} \cdot a \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F = a^2\sqrt{2}}}$

Volumen: $\underline{\underline{V = a^3}}$ Mantelfläche: $\underline{\underline{M = 4a^2}}$ Oberfläche: $\underline{\underline{S = 6a^2}}$

2.1.1.2 Beispiel

Das Volumen eines Würfels beträgt $V = 125\ cm^3$. Berechnen Sie a, d, D, M, S.

1) $V = a^3 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[3]{125}\ cm \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a = 5\ cm}}$

2) $d = a\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{d = 5\sqrt{2}\ cm \approx 7{,}07\ cm}}$

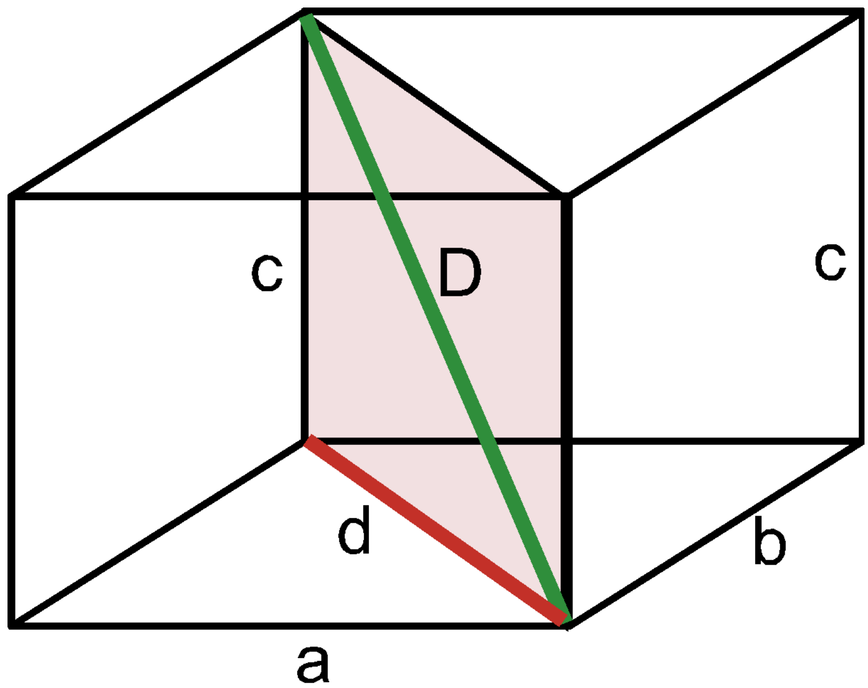
3) $D = a\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{D = 5\sqrt{3}\ cm \approx 8{,}66\ cm}}$

4) $M = 4a^2 \quad \Rightarrow \quad M = 4 \cdot (5\ cm)^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{M = 100\ cm^2}}$

5) $S = 6a^2 \quad \Rightarrow \quad S = 6 \cdot (5\ cm)^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S = 150\ cm^2}}$

Lösen Sie Aufgabe 1 und 2 der Serie 7

2.1.2 Der Quader



Definitionen: a, b, c Kanten; d_i = Flächendiagonalen; D = Körperdiagonale

2.1.2.1 Formeln

Flächendiagonalen: $d_i^2 = a^2 + b^2 \wedge i \in \{1;2;3\} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{d_1 = \sqrt{a^2+b^2}}};\ \underline{\underline{d_2 = \sqrt{b^2+c^2}}};\ \underline{\underline{d_3 = \sqrt{a^2+c^2}}}$

Körperdiagonale: $D^2 = a^2 + d^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{D = \sqrt{a^2+d^2+c^2}}}$

Volumen: $\underline{\underline{V = a \cdot b \cdot c}}$

Oberfläche: $\underline{\underline{S = 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)}}$

2.1.2.2 Beispiel

Ein Quader hat die Seiten $a = 10\ cm$, $b = 8\ cm$ und das Volumen $V = 1200\ cm^3$. Berechnen Sie c, D und S.

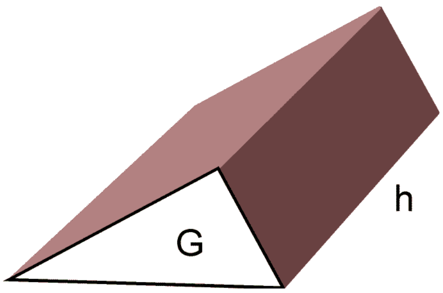
1) $V = a \cdot b \cdot c \quad \Rightarrow \quad 1200\ cm^3 = 10\ cm \cdot 8\ cm \cdot c \quad \Rightarrow c = \frac{1200\ cm^3}{80\ cm^2} \quad \Rightarrow \underline{\underline{c = 15\ cm}}$

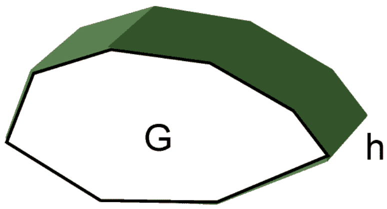
2) $D = \sqrt{a^2+d^2+c^2} \quad \Rightarrow \quad D = \sqrt{10^2 cm^2 + 8^2 cm^2 + 15^2 cm^2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{D = \sqrt{389}\ cm \approx 19{,}72\ cm}}$

3) $S = 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) \quad \Rightarrow \quad S = 2\left(10 \cdot 8 cm^2 + 10 \cdot 15 cm^2 + 8 \cdot 15 cm^2\right) \quad \Rightarrow \underline{\underline{S = 700\ cm^2}}$

Lösen Sie die Aufgaben 3 und 4 der Serie 7

2.1.3 Das allgemeine Prisma





Definitionen: G = Grundfläche, h = Höhe, M = Mantelfläche, S = Oberfläche

2.1.3.1 Formeln

Volumen $\underline{\underline{V = G \cdot h}}$

Oberfläche $\underline{\underline{S = 2G + M}}$

2.1.3.2 Beispiel

Ein regelmässiges dreiseitiges Prisma hat die Grundkante $a = 8\ cm$ und die Höhe $h = 12\ cm$. Berechnen Sie V, M und S

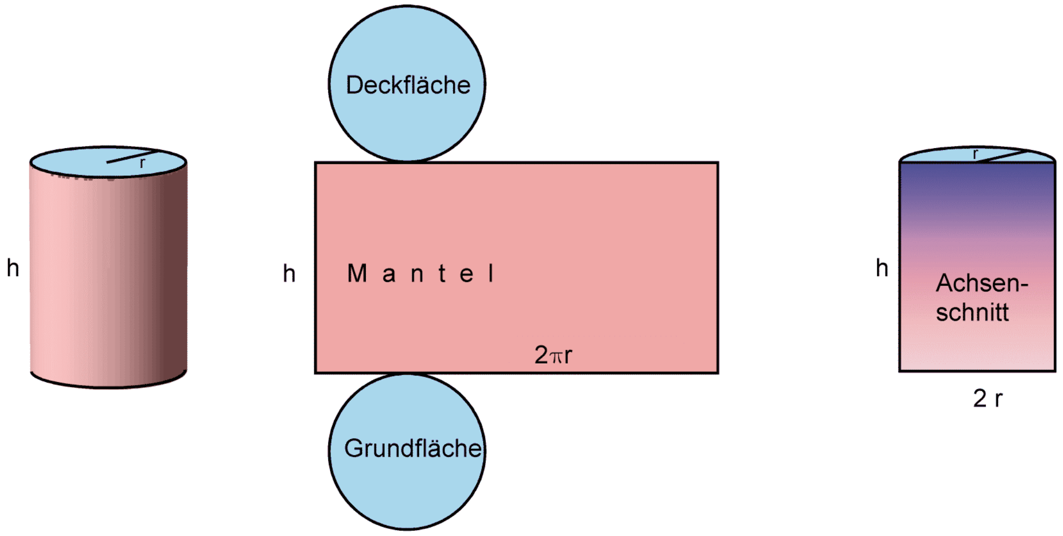
1) $V = G \cdot h \quad \wedge \quad G = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}h = \frac{64\,cm^2 \cdot \sqrt{3}}{4}12cm \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{V = 192\sqrt{3}\ cm^3}}$

2) $M = 3\ a \cdot h \quad \Rightarrow \quad M = 3\ cm \cdot 8\ cm \cdot 12\ cm \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{M = 288\ cm^2}}$

3) $S = 2G + M \quad \Rightarrow \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3\ a \cdot h = \frac{64\ cm^2\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot 8\ cm \cdot 12\ cm \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S \approx 343{,}43\ cm^2}}$

Lösen Sie die Aufgaben 5 und 6 der Serie 7

2.2 Der Zylinder



Definitionen: r = Radius, h = Höhe, G = Grundfläche = Deckfläche, M = Mantelfläche, S = Oberfläche, Achsenschnitt = 2 r h

2.2.1 Formeln

Das Volumen $V = G \cdot h$

Der Achsenschnitt $A = 2\ r \cdot h$

Die Mantelfläche $M = 2\pi\ r \cdot h$

Die Oberfläche $S = 2G + M = 2\pi\ r^2 + 2\pi\ r \cdot h = 2\pi r(r + h)$

2.2.2 Beispiel

Das Volumen eines Zylinder beträgt $V = 200\ cm^3$, die Höhe $h = 5\ cm$. Berechnen Sie r, M und S.

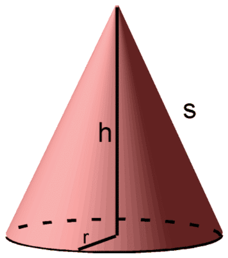
1) $V = \pi\ r^2 \cdot h \quad \Rightarrow \quad 200\ cm^3 = \pi\ r^2 \cdot 5\ cm \quad \Rightarrow r^2 = \frac{40}{\pi} cm^2 \ \Rightarrow \underline{\underline{r = \sqrt{\frac{40}{\pi}}\ cm \approx 3{,}57\ cm}}$

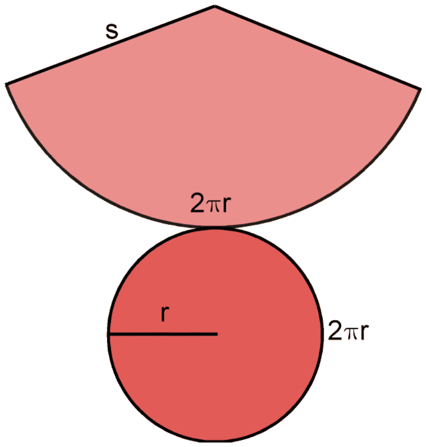
2) $M = 2\pi\ r \cdot h \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{M = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{40}{\pi}} 5\ cm^2 \approx 112{,}10\ cm^2}}$

3) $S = 2\pi\ r(r + h) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S = 2\pi\sqrt{\frac{40}{\pi}}\left(\sqrt{\frac{40}{\pi}}\right) cm^2 \approx 192{,}10\ cm^2}}$

Lösen Sie nun die Aufgaben 7, 8 und 9 der Serie 7

2.3 Der Kegel





Definitionen: s = Seitenlinie, h = Höhe, G = Grundfläche, M = Mantelfläche, r = Radius

2.3.1 Formeln

Das Volumen $V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3}\pi\ r^2 h$

Die Mantelfläche $M = \frac{2\pi r}{2\pi s} \cdot \pi s^2 = \pi\ r \cdot s$

Die Oberfläche $S = G + M = \pi\ r^2 + \pi\ r \cdot s$

$s^2 = r^2 + h^2$

2.3.2 Beispiel

Gegeben ist ein Kegel mit $r = 10$ und $s = 15$. Berechnen Sie h, V und S.

1) $h^2 = s^2 - r^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{h = \sqrt{15^2 - 10^2} = \sqrt{125} \approx 11{,}18}}$

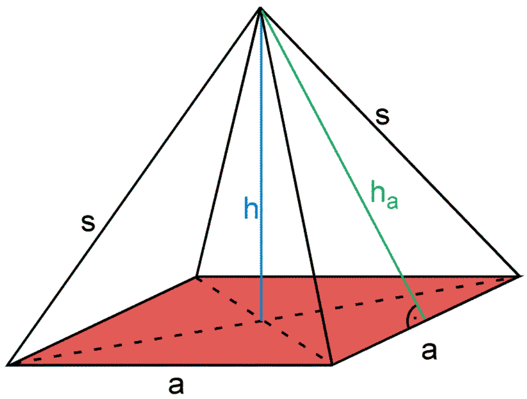
2) $V = \frac{1}{3}\pi\ r^2 h \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{V = \frac{1}{3}\pi\ 100 \cdot \sqrt{125} \approx 1170{,}80}}$

3) $S = \pi\ r\ (r + s) \Rightarrow \quad \underline{\underline{S = 10\ \pi\ (10 + 15) \approx 785{,}40}}$

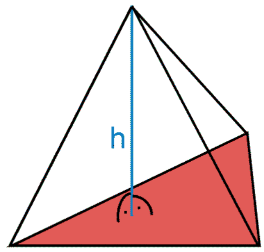
Lösen Sie nun die Aufgaben 12 und 13 der Serie 7

2.4 Die Pyramide

Die quadratische Pyramide



Das Tetraeder



Definitionen: G = Grundfläche, h = Höhe, M = Mantelfläche, S = Oberfläche

2.4.1 Formeln

Das Volumen $V = \frac{1}{3} G \cdot h$

Die Oberfläche $S = G + M$

2.4.2 Beispiel

Eine gerade Pyramide mit einem Quadrat als Grundfläche hat die Grundkante $a = 12$ und das Volumen $V = 1200$. Berechnen Sie h und S.

1) $V = \frac{1}{3} G \cdot h \quad \Rightarrow \quad 1200 = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot h \quad \Rightarrow h = \frac{3 \cdot 1200}{12^2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{h = 25}}$

2)

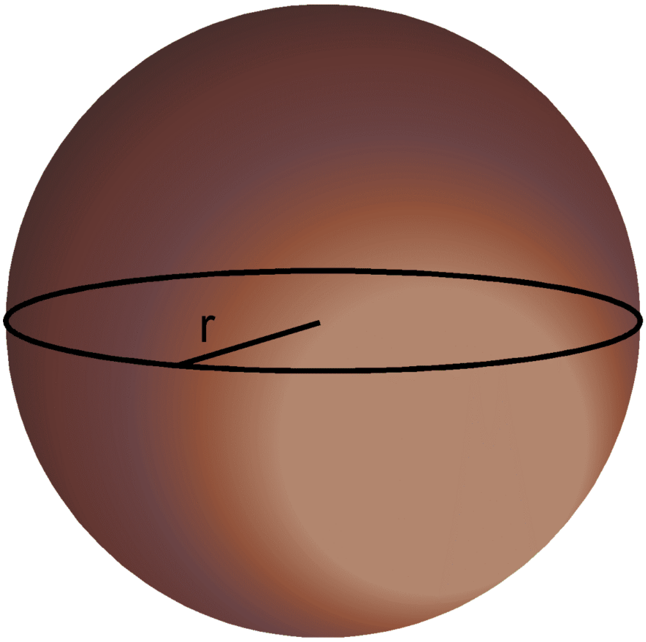
$$S = G + M \quad \wedge \quad M = 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_a \quad \wedge \quad h_a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 25^2 + 6^2 = 661$$

$$\Rightarrow \quad h_a = \sqrt{661} \approx 25{,}71$$

$$M = 2 \cdot 12 \cdot \sqrt{661} \approx 617{,}04 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S = 12^2 + 24 \cdot \sqrt{661} \approx 761{,}04}}$$

Lösen Sie nun die Aufgaben 10 und 11 der Serie 7

2.5 Die Kugel



Definitionen: r = Radius, S = Oberfläche, V = Volumen

2.5.1 Formeln

Das Volumen $V = \frac{4}{3}\pi\ r^3$

Die Oberfläche $S = 4\pi\ r^2$

2.5.2 Beispiel

Die Oberfläche einer Kugel beträgt $S = 500\ \pi$. Berechnen Sie r und V.

1) $S = 4\pi\ r^2 \quad \Rightarrow \quad 500\ \pi = 4\pi\ r^2 \Rightarrow r^2 = 125 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{r = \sqrt{125} \approx 11{,}18}}$

2) $V = \frac{4}{3}\pi\ r^3 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{V = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{125}\right)^3 \approx 5854{,}01}}$

Lösen Sie nun die Aufgaben 15 und 16 der Serie 7