1.1 La fonction du second degré

Une parabole est déterminée par trois points. Il y a trois formes de la fonction du second degré.

1.1.1 La fonction du second degré donnée par le polynôme du degré 2

$$\boxed{y = f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c}$$

Les trois coefficients a, b et c sont déterminés par les trois points donnés.

1.1.2 La fonction du second degré donnée par les zéros du polynôme

Si la parabole coupe l'axe des x, on peut déterminer les zéros de la fonction du second degré.

$$\boxed{y = f(x) = a \cdot \left(x - x_{N_1}\right) \cdot \left(x - x_{N_2}\right)}$$

1.1.3 La fonction du second degré donnée par les déplacements de la parabole à l'origine

Cette forme décrit le déplacement de la parabole à l'origine $y = f(x) = a \cdot x^2$ à l'endroit du maximum ou du minimum $M\left(x_m; y_m\right)$.

$$\boxed{y = f(x) = a \cdot \left(x - x_m\right)^2 + y_m}$$

Dans la suite, on dérive les coordonnées du maximum, respectivement du minimum, en fonction de la première forme.

$$y = f(x) = a \cdot \left(x - x_m\right)^2 + y_m$$

$$y = f(x) = a \cdot x^2 \underbrace{-2a \cdot x_m}_{b} \cdot x + \underbrace{a \cdot {x_m}^2 + y_m}_{c}$$

Par comparaison des coefficients, on obtient les équations suivantes:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} -2a \cdot x_m = b & \Rightarrow & \underline{\underline{x_m = \frac{-b}{2a}}} \\ a \cdot {x_m}^2 + y_m = c & \Rightarrow & \underline{\underline{y_m = c - a \cdot {x_m}^2 = c - \frac{b^2}{4a}}} \end{array}}$$

Le maximum ou le minimum se déplace de l'origine à la position $M\left(x_m; y_m\right)$, donné par:

$$\boxed{M\left(\frac{-b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right)}$$

1.1.4 Exercices

1) donné: $P_1(3;6) \in p$; $P_2(7;-10) \in p$; $P_3(0;-24) \in p$
   cherché: Les trois formes de la parabole p.

2) donné: $P_1(3;5) \in p$; $P_2(7;-3) \in p$; $P_3(0;4) \in p$
   cherché: Les trois formes de la parabole p.

3) donné: $A(-3;0)$, $B(5;0)$ et $C(0;3)$ (deux zéros et un point)
   cherché: Les trois formes de la parabole p.

4) donné: $S(-2;-1)$, $A(2;7)$ (le sommet S et un point)
   cherché: Les trois formes de la parabole p.

1.1.5 Exemple

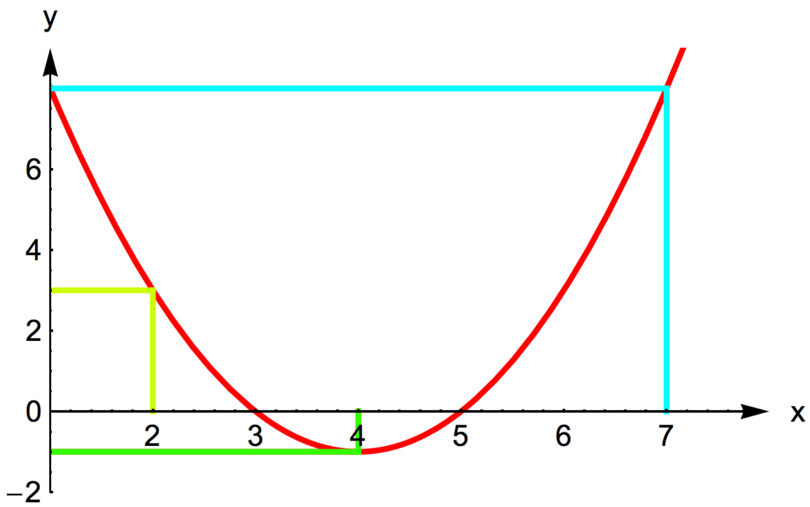
Soient donnés les trois points de la fonction du second degré: $P_1(0;15)$; $P_2(2;3)$; $P_3(7;8)$

$$
\begin{array}{lll}
f(0)=15 & \Rightarrow & \underline{\underline{c=15}} \\
f(2)=3 & \Rightarrow & 4a+2b+c=4a+2b+15=3 \\
f(7)=8 & \Rightarrow & 49a+7b+c=49a+7b+15=8 \\
\hline
 & \Rightarrow & 28a+14b+105=21 \\
 & \Rightarrow & \underline{98a+14b+30=16} \\
 & \Rightarrow & 70a-75=-5 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a=1}} \quad \underline{\underline{b=-8}}
\end{array}
$$

La fonction de la parabole est déterminée par

$$\boxed{y=f(x)=x^2-8x+15}$$

La représentation graphique de la parabole est donnée dans la figure suivante.



Nous dérivons les deux autres formes. On calcule les zéros de la parabole et en dérive la troisième forme:

$$x^2-8x+15=0 \qquad \Rightarrow x_{N_{1;2}}=4\pm\sqrt{16-15}=4\pm 1 \qquad \Rightarrow x_{N_1}=3 \qquad x_{N_2}=5$$

La deuxième forme s'écrit:

$$\boxed{\Rightarrow y=f(x)=(x-3)(x-5)}$$

La troisième forme s'obtient de la façon suivante:

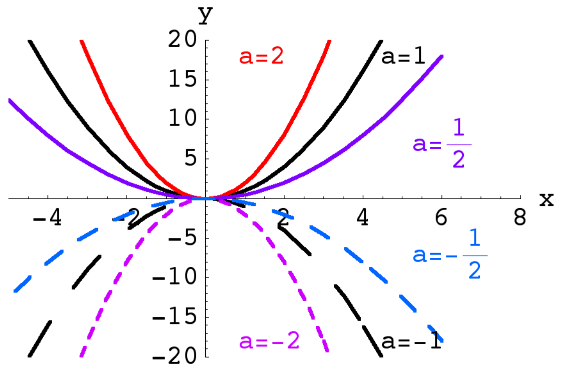
$$x_m=\tfrac{-b}{2a}=4$$

$$y_m=c-\tfrac{b^2}{4a}=-1$$

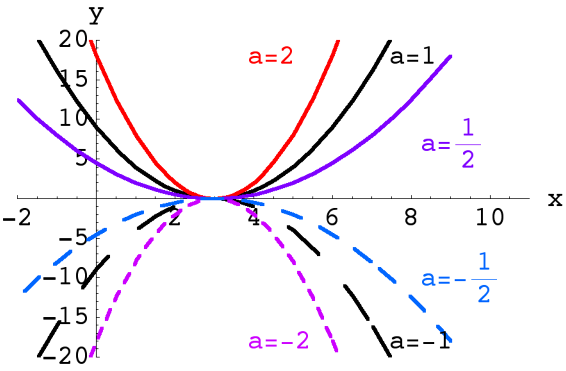
$$\boxed{\Rightarrow y=f(x)=(x-4)^2-1} \quad \text{avec} \quad \boxed{M(4;-1)}$$

1.1.6 Exemples et résumé

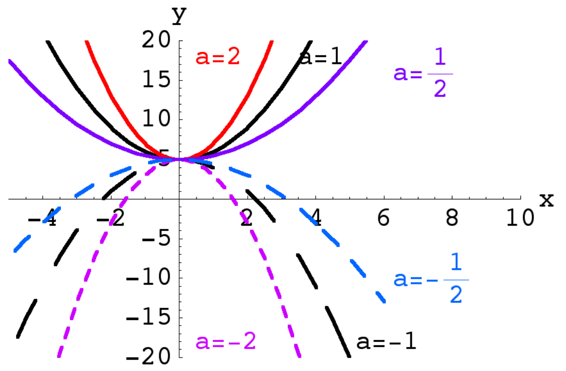
$y = f(x) = a(x)^2 \quad \wedge \quad M(0;0)$



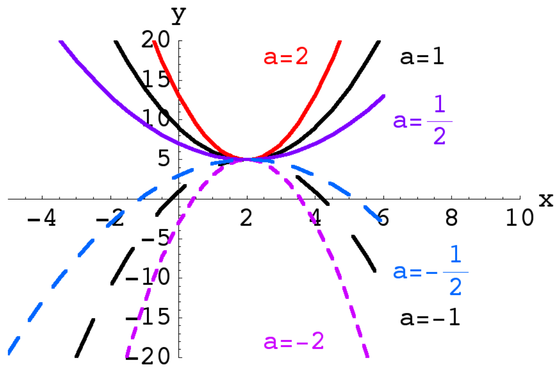
$y = f(x) = a \cdot (x-3)^2 \quad \wedge \quad M(3;0)$



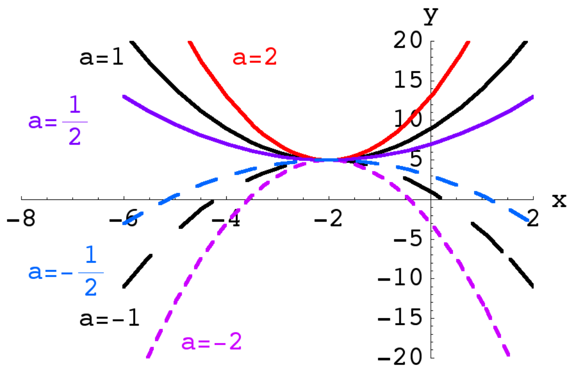
$y = f(x) = a \cdot (x)^2 + 5 \quad \wedge \quad M(0;5)$



$y = f(x) = a \cdot (x-2)^2 + 5 \quad \wedge \quad M(2;5)$



$y = f(x) = a \cdot (x+2)^2 + 5 \quad \wedge \quad M(-2;5)$



1.1.7 Propriétés de la deuxième forme

En comparaison avec la fonction: $y = f(x) = x^2$ le graphe de la fonction

$y = f(x) = a \cdot (x - x_m)^2 + y_m$ possède les propriétés suivantes:

$\lvert a \rvert > 1$	est une parabole moins évasée,	$\lvert a \rvert < 1$	est une parabole plus évasée
$a > 0$	est une parabole ouverte vers le haut,	$a < 0$	est une parabole ouverte vers le bas
x_m	indique le déplacement horizontal	y_m	indique le déplacement vertical
$M(x_m;y_m) \wedge a > 0$	M est le minimum	$M(x_m;y_m) \wedge a < 0$	M est le maximum