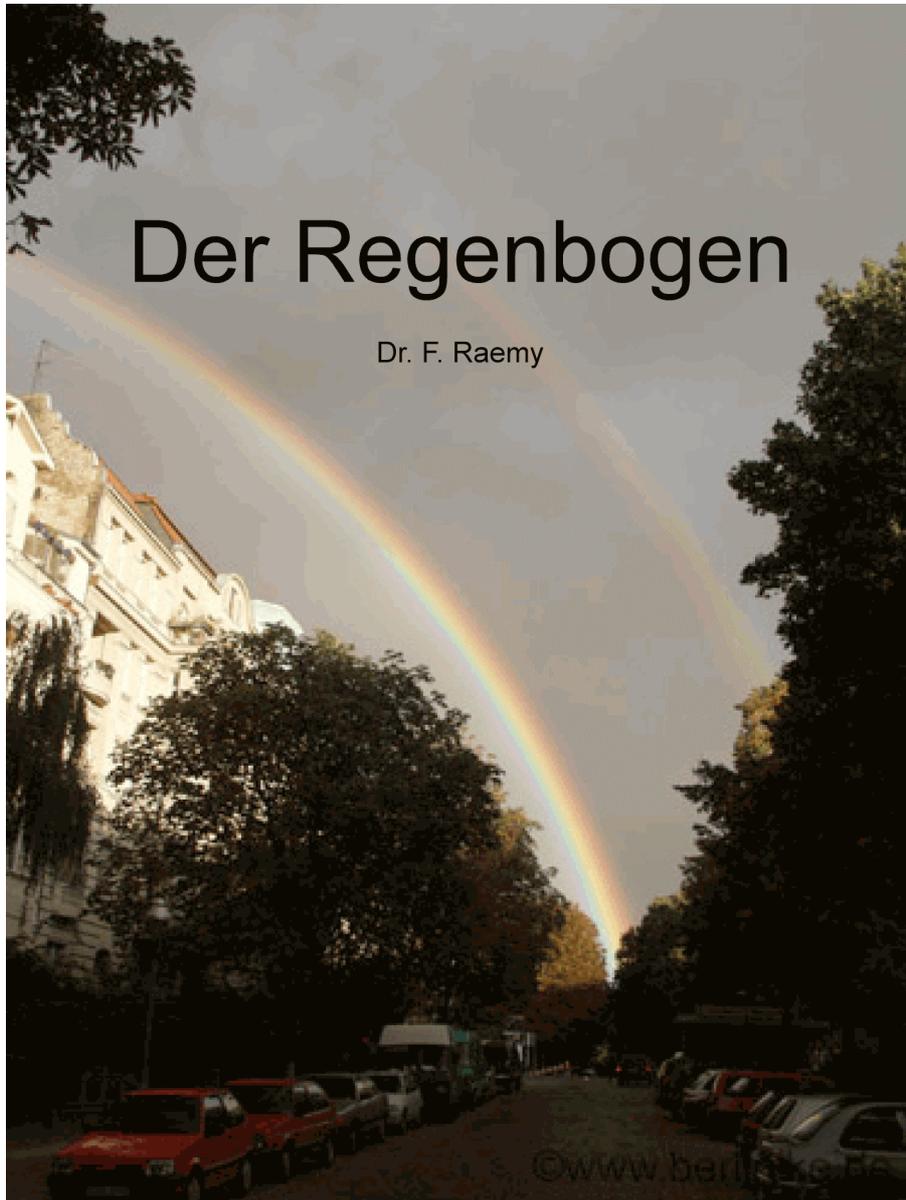


Der Regenbogen

Dr. F. Raemy



Theorie des Regenbogens

Trifft weisses Licht aus trockener Luft auf Regentropfen mit feuchter Luft, dann haben wir es mit einem Übergang zwischen zwei Medien zu tun. Licht wird bei einem solchen Übergang gebrochen und ein Teil auch direkt reflektiert. Bei der Reflexion ist der Einfallswinkel gemessen bezüglich der Flächennormale (Senkrechte auf der Grenzfläche) gleich dem Ausfallswinkel. Das direkt an der Oberfläche des Tropfens reflektierte Licht ist für den Beobachter wieder weiss und deshalb hier nicht interessant.



Das Reflexionsgesetz

$$\alpha_{\text{einfallend}} = \alpha_{\text{ausfallend}}$$

Ein Teil der Intensität der Lichtstrahlen wird an der Grenzschicht eines Tropfens gebrochen, dann entweder ein oder zweimal im Tropfen reflektiert bevor der Strahl wieder in die Schicht der trockenen Luft zurückgebrochen wird. Wir haben es also mit zweimaliger Brechung und einer Einfach- oder Doppelreflexion im Wassertropfen zu tun. Bei der Brechung werden nicht alle Farben, also Wellenlängen gleich stark gebrochen. Diesen Effekt nennt man Dispersion. Er beruht darauf, dass die Lichtgeschwindigkeit in Stoffen von der Wellenlänge abhängig ist. Weisses Licht wird so im Wassertropfen in die Spektralfarben zerlegt und zeigt alle Farben.

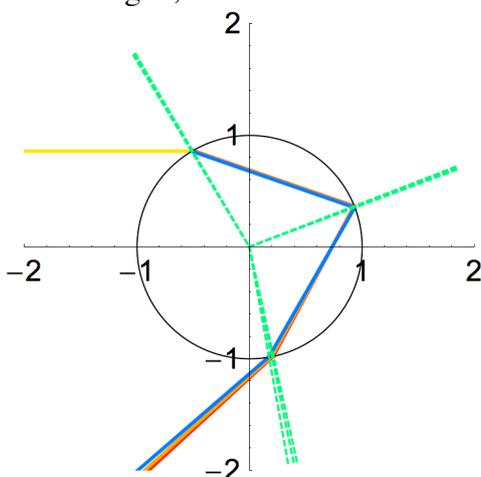
Bezeichnet man mit $n = \frac{v_{\text{Vakuum}}}{v_{\text{Medium}}} = \frac{c}{v}$, $c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ den Brechungsindex, welcher das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum zur Geschwindigkeit v des Lichtes in einem durchsichtigen Medium angibt, dann kann nach dem Gesetz von Snellius aus dem Einfallswinkel α im ersten Medium der Brechungswinkel β im zweiten Medium bestimmt werden.

Das Brechungsgesetz

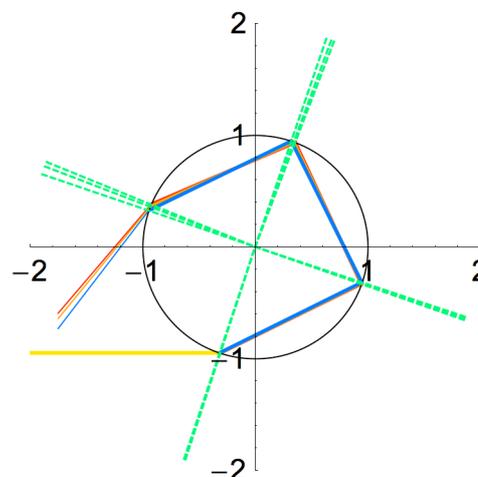
$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \cdot \sin \alpha\right)$$

In trockener Luft ist $n_1 = 1,000272$, das heisst, die Lichtgeschwindigkeit ist nur wenig kleiner als im Vakuum. In Wasser ist der Brechungsindex n_2 je nach Farbe: $n_{\text{blau}} = 1,340$; $n_{\text{rot}} = 1,328$, woraus die unterschiedlichen Strahlengänge im Wassertropfen resultieren.

Im obigen Bild sind der Hauptregenbogen und der Nebenregenbogen sichtbar. Wir werden in der Folge nun versuchen, die beiden Typen von Regenbogen zu beschreiben. Studieren wir dazu die nachfolgenden Abbildungen, welche den berechneten Verlauf der Strahlen darstellen.



Berechneter Strahlengang im Regentropfen eines **Hauptregenbogens** mit Einfachreflexion

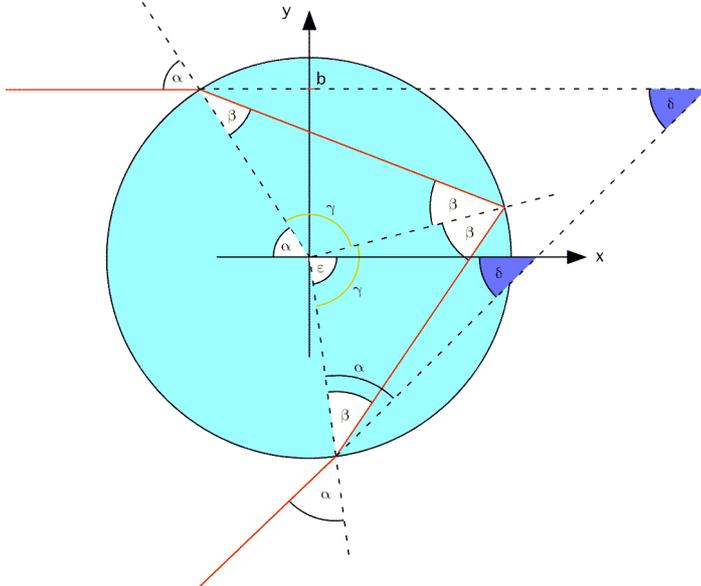


Berechneter Strahlengang im Regentropfen eines **Nebenregenbogens** mit Doppelreflexion

Der totale Ablenkwinkel beim Hauptregenbogen und beim Nebenregenbogen

Damit die Farben beim Regenbogen getrennt erscheinen, muss der Ablenkwinkel δ zwischen dem einfallenden weissen Strahl und dem doppelt gebrochenen und reflektierten farbigen Strahlen maximal sein. Bei einem parallel zur x-Achse einfallenden Strahl auf die Kugel (Kreis) kann die Höhe b variiert werden, die auch den totalen Ablenkwinkel beeinflusst. Würde der Strahl entlang der x-Achse einfallen, ergäbe sich nur eine Reflexion in die gleiche Richtung und die Farben wären nicht sichtbar.

Die folgende Figur zeigt den Verlauf der Strahlen im Regentropfen für den Hauptregenbogen nach einfacher Reflexion aber doppelter Brechung.



Soll der Ablenkwinkel als Funktion des y-Achsenabschnittes b maximal werden, dann muss zuerst die Zielfunktion $\delta(b)$ ermittelt und maximiert werden.

$$\delta = 180^\circ - (\varepsilon + \alpha)$$

Der Winkel ε ist im Falle des Haupt- und des Nebenregenbogens wie folgt definiert.

Hauptregenbogen:

$$\varepsilon = \alpha + 2\gamma - 180^\circ$$

Nebenregenbogen

$$\varepsilon = \alpha + 2\gamma - 180^\circ$$

Damit ergibt sich für den Haupt- und Nebenregenbogen:

$$\delta = 4\beta - 2\alpha$$

$$\delta = -180^\circ + 6\beta - 2\alpha$$

Das Brechungsgesetz liefert:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \frac{b}{r}\right)$$

Der Winkel α ist definiert durch:

$$\sin \alpha = \frac{b}{r} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{b}{r}\right)$$

Somit wird der totale Ablenkwinkel $\delta(b)$ beim Haupt- und Nebenregenbogen:

$$\delta(b) = 4 \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \frac{b}{r}\right) - 2 \arcsin\left(\frac{b}{r}\right)$$

$$\delta(b) = -180^\circ + 6 \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \frac{b}{r}\right) - 2 \arcsin\left(\frac{b}{r}\right)$$

Maximum der Funktion $\delta(b)$ durch Optimierung

Wir suchen das Maximum der Funktion $\delta(b)$ beim Haupt- und Nebenregenbogen. Dazu bildet man die Ableitungen:

$$\delta'(b) = 4 \frac{\left(\frac{n_1}{n_2 r}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{n_1 b}{n_2 r}\right)^2}} - 2 \frac{\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{b}{r}\right)^2}}$$

$$\delta'(b) = 6 \frac{\left(\frac{n_1}{n_2 r}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{n_1 b}{n_2 r}\right)^2}} - 2 \frac{\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{b}{r}\right)^2}}$$

Setzt man die Ableitung gleich Null, erhält man den y-Achsenabschnitt b , für welchen der maximale Ablenkwinkel resultiert.

$$\begin{aligned} \delta'(b) &= 4 \frac{\left(\frac{n_1}{n_2 r}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{n_1 b}{n_2 r}\right)^2}} - 2 \frac{\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{b}{r}\right)^2}} = 0 \\ \Rightarrow 2 \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{n_1 b}{n_2 r}\right)^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{b}{r}\right)^2}} \\ \Rightarrow 2 \left(\frac{n_1}{n_2}\right) \sqrt{1-\left(\frac{b}{r}\right)^2} &= \sqrt{1-\left(\frac{n_1 b}{n_2 r}\right)^2} \\ \Rightarrow 4 \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \left(1-\left(\frac{b}{r}\right)^2\right) &= 1-\left(\frac{n_1 b}{n_2 r}\right)^2 \\ \Rightarrow 3 \left(\frac{n_1 b}{n_2 r}\right)^2 &= 4 \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 - 1 \\ \Rightarrow b &= \frac{r}{n_1} \sqrt{\frac{4n_1^2 - n_2^2}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta'(b) &= 6 \frac{\left(\frac{n_1}{n_2 r}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{n_1 b}{n_2 r}\right)^2}} - 2 \frac{\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{b}{r}\right)^2}} = 0 \\ \Rightarrow 3 \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{n_1 b}{n_2 r}\right)^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{b}{r}\right)^2}} \\ \Rightarrow 3 \left(\frac{n_1}{n_2}\right) \sqrt{1-\left(\frac{b}{r}\right)^2} &= \sqrt{1-\left(\frac{n_1 b}{n_2 r}\right)^2} \\ \Rightarrow 9 \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \left(1-\left(\frac{b}{r}\right)^2\right) &= 1-\left(\frac{n_1 b}{n_2 r}\right)^2 \\ \Rightarrow 8 \left(\frac{n_1 b}{n_2 r}\right)^2 &= 9 \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 - 1 \\ \Rightarrow b &= \frac{r}{n_1} \sqrt{\frac{9n_1^2 - n_2^2}{8}} \end{aligned}$$

Die numerischen Werte für die y-Achsenabschnitte im Kreis mit Radius $r = 1$ sind:

Farbe	Brechungsindex	y-Achsenabschnitt im Hauptregenbogen	y-Achsenabschnitt im Nebenregenbogen
rot:	$n = 1,32889$	$\Rightarrow b = 0,863136$	$\Rightarrow b = -0,950987$
gelb:	$n = 1,333$	$\Rightarrow b = 0,861022$	$\Rightarrow b = -0,950268$
grün:	$n = 1,3371$	$\Rightarrow b = 0,858902$	$\Rightarrow b = -0,949548$
blau:	$n = 1,3403$	$\Rightarrow b = 0,857238$	$\Rightarrow b = -0,948985$

Aus den beiden y-Achsenabschnitten wird der maximale Ablenkwinkel im Hauptregenbogen und dem Nebenregenbogen berechnet.

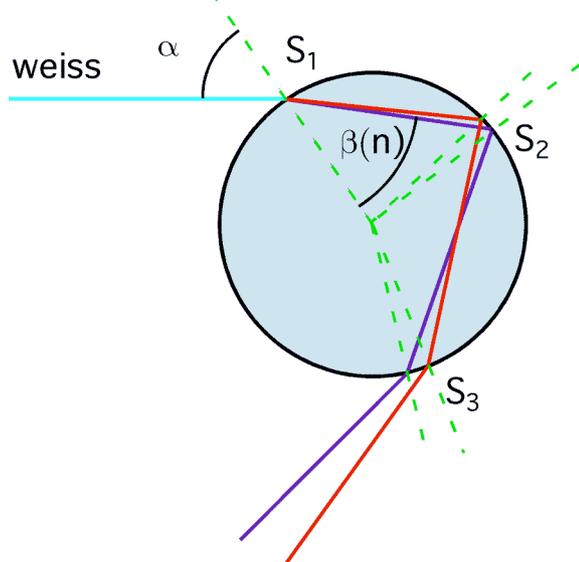
	im Hauptregenbogen	im Nebenregenbogen
rot:	$\delta(b = 0,863136) = 42,7328^\circ$	$\delta(b = -0,950987) = 49,7117^\circ$
gelb:	$\delta(b = 0,861022) = 42,1308^\circ$	$\delta(b = -0,950268) = 50,7957^\circ$
grün:	$\delta(b = 0,858902) = 41,5379^\circ$	$\delta(b = -0,949548) = 51,8653^\circ$
blau:	$\delta(b = 0,857238) = 41,0802^\circ$	$\delta(b = -0,948985) = 52,6922^\circ$

Der Hauptregenbogen zeigt sich nach der Totalen Ablenkung um ca. 42 Grad, der Nebenregenbogen zeigt sich nach der totalen Ablenkung von ca. 51 Grad.

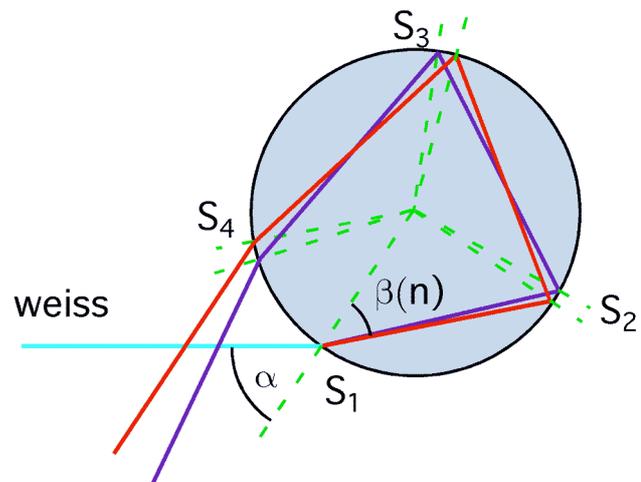
Der Nebenregenbogen und der Hauptregenbogen

In den beiden folgenden Darstellungen wird die Brechung und Reflexion im Regentropfen für doppelt und einfach reflektierte Sonnenstrahlen analysiert. Die gestrichelt gezeichneten Linien stellen die Normale auf der Kugel (Kreis) dar und dienen im Falle der Brechung zur Bestimmung des Einfalls- und Brechungswinkels und im Falle der Reflexion zur Bestimmung des Einfalls- oder Reflexionswinkels, die im zweiten Falle gleich sind.

Beim Nebenregenbogen wird Doppelreflexion im innern des Regentropfens für die Spektralfarben wirksam, während beim Hauptregenbogen nur eine einfache Reflexion wirksam ist. Die Intensität der Farben ist beim Hauptregenbogen grösser als beim Nebenregenbogen. Beachten Sie die umgekehrte Reihenfolge der Farben. Die folgenden Figuren zeigen den Strahlengang im innern des Regentropfens anschaulich. Insbesondere die Strahlüberschneidungen werden sichtbar dargestellt.



Der Verlauf der Strahlen im Regentropfen eines **Hauptregenbogens** mit Einfachreflexion

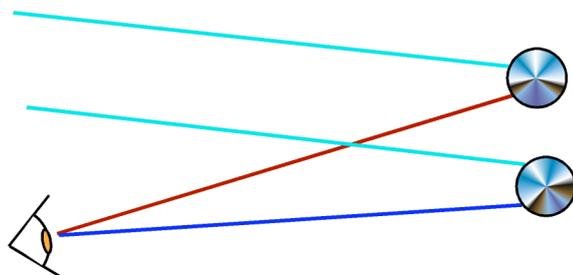


Der Verlauf der Strahlen im Regentropfen eines **Nebenregenbogens** mit Doppelreflexion

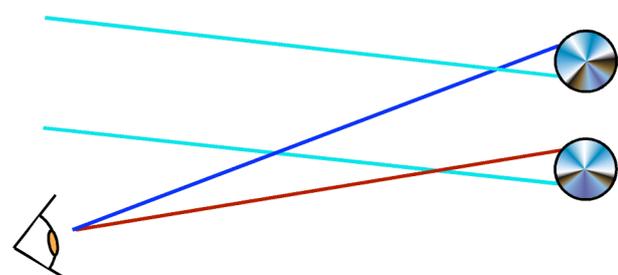
Im rechten Bild geschieht die Brechung an den Orten S_1 und S_4 , im linken Bild an den Orten S_1 und S_3 . Rechts finden die Reflexionen in den Punkten S_2 und S_3 , links nur im Punkt S_2 statt.

Die Farbreihenfolge im Hauptregenbogen und im Nebenregenbogen

Damit der rote und blaue Strahl des Hauptregenbogens gleichzeitig im Auge sichtbar sind, muss der Tropfen, welcher für das Auge rotes Licht reflektiert weiter oben sein als der Tropfen, der blaues Licht reflektiert. Somit ist rot im Hauptregenbogen oben und blau unten zu sehen. Im Nebenregenbogen, der oberhalb des Hauptregenbogens liegt, ist die Farbreihenfolge umgekehrt, weil die Farben durch Zweifachreflexion entstanden sind.



Farben im Hauptregenbogen
rot oben und blau unten



Farben im Nebenregenbogen
blau oben, rot unten