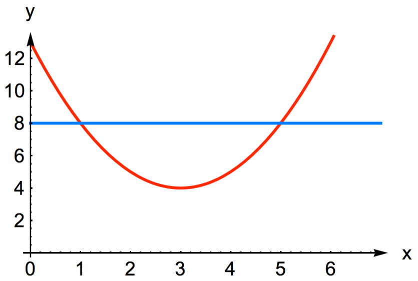
Lösen Sie die folgenden quadratischen Ungleichungen

Nr 1 $\quad (x-3)^2+4\geq 8$



Lösungsmenge: $\boxed{L_x=\{x\mid x\leq 1\vee x\geq 5\}}$

Analytische Methode

Wir können die vereinfachte quadratische Ungleichung mit Hilfe von Linearfaktoren schreiben, weil die Schnittpunkte zwischen der Parabel und der horizontalen Geraden existieren.

$x^2-6x+13\geq 8 \qquad \Rightarrow \qquad x^2-6x+5\geq 0$

Wir bestimmen die Nullstellen: $x^2-6x+5=0$

$x_{1;2}=3\pm\sqrt{9-5}=3\pm 2 \qquad x_1=1 \quad \vee \qquad x_2=5$

damit schreibt sich die Ungleichung mit Hilfe der Linearfaktoren:

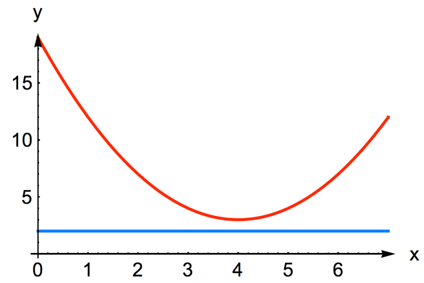
$\Rightarrow (x-1)(x-5)\geq 0$

Wenn nun zwei Zahlen (Linearfaktoren) als Produkt eine positive Zahl (oder Null) ergeben müssen, dann existieren zwei mögliche Fälle: entweder sind beide Zahlen positiv oder Null oder beide Zahlen sind negativ oder Null. Das heisst:

$1.\ Fall: x-1\geq 0\wedge x-5\geq 0$	$\vee$	$2.\ Fall: x-1\leq 0\wedge x-5\leq 0$
$\Rightarrow x\geq 1\wedge x\geq 5$		$\Rightarrow x\leq 1\wedge x\leq 5$
$\Rightarrow L_{x_1}=\{x\mid x\geq 5\}$		$\Rightarrow L_{x_2}=\{x\mid x\leq 1\}$

Zusammenfassung der Lösungen: $\boxed{L_x=\{x\mid x\leq 1\vee x\geq 5\}}$

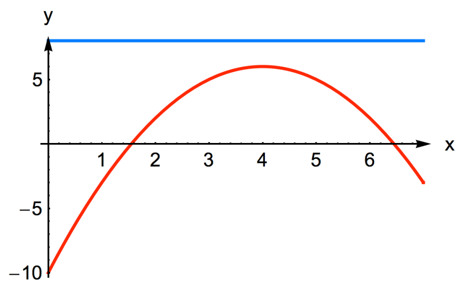
Nr 2 $\quad (x-4)^2+3\geq 2$



Lösungsmenge: $\boxed{L_x=\{x\mid x\in\mathbb{R}\}}$

Weil die Parabel und die Gerade sich nicht schneiden, existiert keine Zerlegung der vereinfachten quadratischen Ungleichungen in Linearfaktoren.

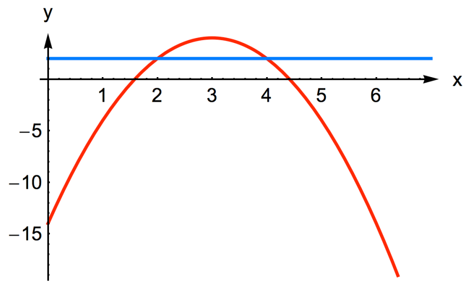
Nr 3 $\quad -(x-4)^2+6<8$



Lösungsmenge: $\boxed{L_x=\{x\mid x\in\mathbb{R}\}}$

Weil die Parabel und die Gerade sich nicht schneiden, existiert keine Zerlegung der vereinfachten quadratischen Ungleichungen in Linearfaktoren.

Nr 4 $\quad -2(x-3)^2+4 \geq 2$



Lösungsmenge: $\boxed{L_x = \{x \mid 2 \leq x \leq 4\}}$

Analytische Methode

Wir können die vereinfachte quadratische Ungleichung mit Hilfe von Linearfaktoren schreiben, weil die Schnittpunkte zwischen der Parabel und der horizontalen Geraden existieren.

$-2x^2+12x-14 \geq 2 \quad \Rightarrow \quad x^2-6x+7 \leq -1 \quad \Rightarrow \quad x^2-6x+8 \leq 0$

Wir bestimmen die Nullstellen: $x^2-6x+5=0$

$x_{1;2} = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1 \qquad x_1 = 2 \quad \vee \quad x_2 = 4$

damit schreibt sich die Ungleichung mit Hilfe der Linearfaktoren:

$\Rightarrow -2(x-2)(x-4) \geq 0$

Die -2 multipliziert zwei Linearfaktoren. Wenn das Produkt aus allen drei Zahlen positiv sein soll, dann muss das Produkt aus den Klammern (Linearfaktoren) negativ sein.

Wenn nun zwei Zahlen (Linearfaktoren) als Produkt eine negative Zahl (oder Null) ergeben müssen, dann existieren zwei mögliche Fälle: entweder ist die erste Zahl positiv oder Null und die zweite negativ oder Null oder die erste Zahl ist negativ oder Null und die zweite positiv oder Null. Das heisst:

$1.\ \mathit{Fall}: x-2 \geq 0 \wedge x-4 \leq 0 \qquad \vee \qquad 2.\ \mathit{Fall}: x-2 \leq 0 \wedge x-4 \geq 0$

$\Rightarrow x \geq 2 \wedge x \leq 4 \qquad \Rightarrow x \leq 2 \wedge x \geq 4$

$\Rightarrow L_{x_1} = \{x \mid 2 \leq x \leq 4\} \qquad \Rightarrow L_{x_2} = \{\ \}$