1.1 Die Funktion zweiten Grades, die quadratische Funktion

Eine Parabel wird durch drei Punkte bestimmt. Daraus lassen sich drei Formen der Funktion zweiten Grades bestimmen.

1.1.1 Die Funktion zweiten Grades gegeben als Polynom vom Grade 2

$$\boxed{y = f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c}$$

Die drei Koeffizienten a, b und c lassen sich aus der Angabe von drei gegebenen Punkten bestimmen.

1.1.2 Die Funktion zweiten Grades gegeben in der Nullstellenform

Falls die Parabel die x-Achse schneidet, können aus der ersten Form die Nullstellen des Polynoms bestimmt werden.

$$\boxed{y = f(x) = a \cdot \left(x - x_{N_1}\right) \cdot \left(x - x_{N_2}\right)}$$

1.1.3 Die Funktion zweiten Grades gegeben in der Scheitelform

Diese Form besteht aus der Verschiebung der Ursprungsparabel $y = f(x) = a \cdot x^2$ an den Ort des Maximums resp. des Minimums $M(x_m; y_m)$.

$$\boxed{y = f(x) = a \cdot (x - x_m)^2 + y_m}$$

Der Zusammenhang zwischen den Koordinaten dieses Punktes M und der ersten Form wird wie folgt hergeleitet.

$$y = f(x) = a \cdot (x - x_m)^2 + y_m$$

$$y = f(x) = a \cdot x^2 \underbrace{-2a \cdot x_m}_{b} \cdot x + \underbrace{a \cdot x_m{}^2 + y_m}_{c}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man die folgenden Gleichungen:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} -2a \cdot x_m = b & \Rightarrow & \underline{\underline{x_m = \frac{-b}{2a}}} \\ a \cdot x_m{}^2 + y_m = c & \Rightarrow & \underline{\underline{y_m = c - a \cdot x_m{}^2 = c - \frac{b^2}{4a}}} \end{array}}$$

Das Maximum oder Minimum verschiebt sich vom Ursprung des Koordinatensystems an den Ort $M(x_m; y_m)$, gegeben durch

$$\boxed{M\left(\frac{-b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right)}$$

1.1.4 Übungen

1) Gegeben: $P_1(3;6) \in p$; $P_2(7;-10) \in p$; $P_3(0;-24) \in p$
   Gesucht: Die drei Formen der Parabel p:

2) Gegeben: $P_1(3;5) \in p$; $P_2(7;-3) \in p$; $P_3(0;4) \in p$
   Gesucht: Die drei Formen der Parabel p:

3) Gegeben: $A(-3;0)$, $B(5;0)$ und $C(0;3)$ (Zwei Nullstellen und ein Punkt)
   Gesucht: Die drei Formen der Parabel p:

4) Gegeben: $S(-2;-1)$, $A(2;7)$ (Der Scheitel S und ein Punkt)
   Gesucht: Die drei Formen der Parabel p:

1.1.5 Beispiel

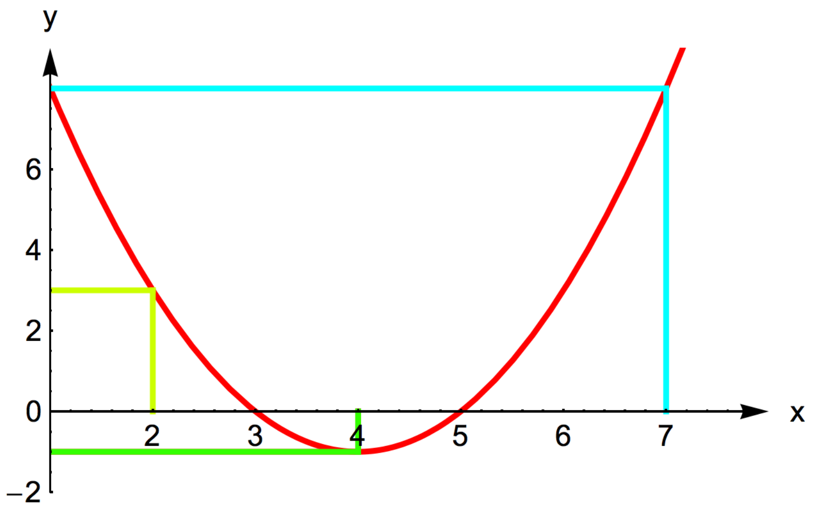
Gegeben sind drei Punkte der quadratischen Funktion $P_1(0;15);\ P_2(2;3);\ P_3(7;8)$

$$\begin{array}{lll}
f(0)=15 & \Rightarrow & \underline{\underline{c=15}} \\
f(2)=3 & \Rightarrow & 4a+2b+c=4a+2b+15=3 \\
f(7)=8 & \Rightarrow & 49a+7b+c=49a+7b+15=8 \\
\hline
 & \Rightarrow & 28a+14b+105=21 \\
 & \Rightarrow & \underline{98a+14b+30=16} \\
 & \Rightarrow & 70a-75=-5 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{a=1}} \quad \underline{\underline{b=-8}}
\end{array}$$

Damit ist die Funktion der Parabel bestimmt.

$$\boxed{y=f(x)=x^2-8x+15}$$

Die graphische Darstellung der Parabel präsentiert sich gemäss der nachfolgenden Figur.



Wir bestimmen die beiden andern Formen. Zuerst bestimmen wir die Nullstellen und daraus die zweite Form:

$$x^2-8x+15=0 \qquad \Rightarrow x_{N_{1;2}}=4\pm\sqrt{16-15}=4\pm1 \qquad \Rightarrow x_{N_1}=3 \qquad x_{N_2}=5$$

Damit wird die zweite Form:

$$\boxed{\Rightarrow y=f(x)=(x-3)(x-5)}$$

Die dritte Form erhalten wir aus der Berechnung der Koordinaten des Scheitels:

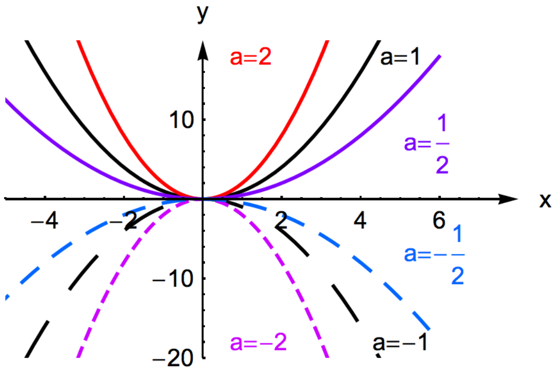
$$x_m=\tfrac{-b}{2a}=4$$

$$y_m=c-\tfrac{b^2}{4a}=-1$$

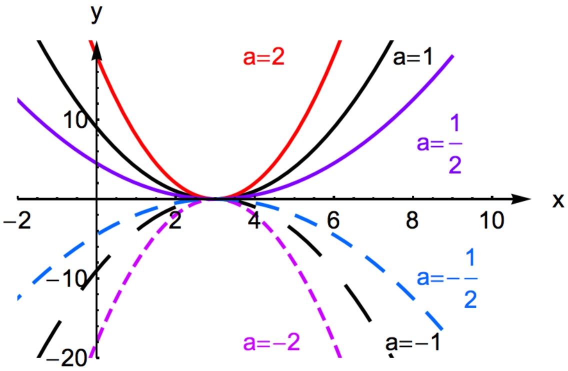
$$\boxed{\Rightarrow y=f(x)=(x-4)^2-1} \quad \text{mit} \quad \boxed{M(4;-1)}$$

1.1.6 Beispiele und Überblick

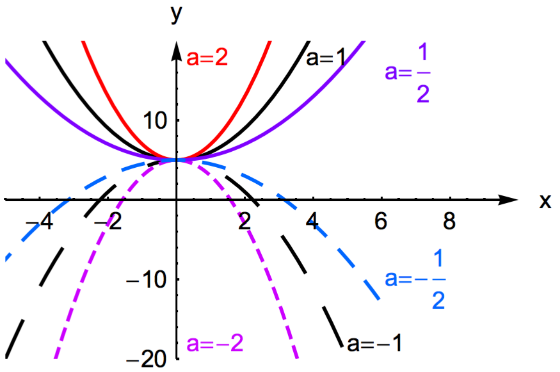
$y = f(x) = a(x)^2 \quad \wedge \quad M(0;0)$



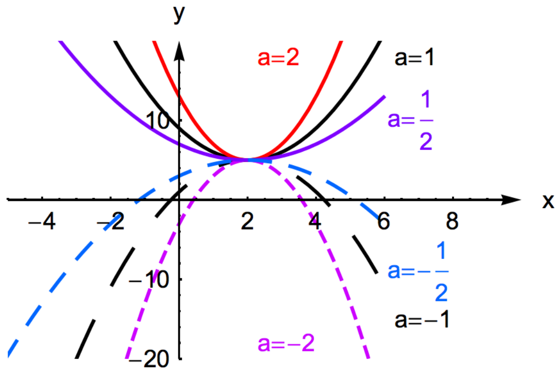
$y = f(x) = a \cdot (x-3)^2 \quad \wedge \quad M(3;0)$



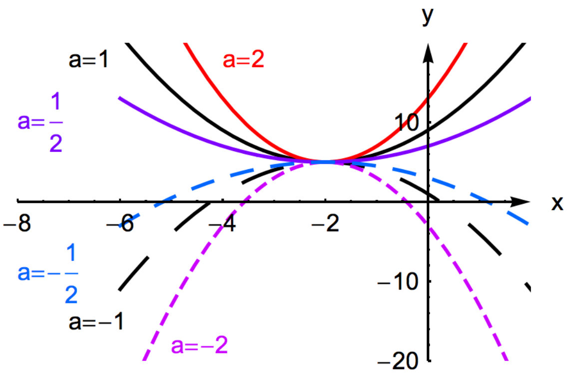
$y = f(x) = a \cdot (x)^2 + 5 \quad \wedge \quad M(0;5)$



$y = f(x) = a \cdot (x-2)^2 + 5 \quad \wedge \quad M(2;5)$



$y = f(x) = a \cdot (x+2)^2 + 5 \quad \wedge \quad M(-2;5)$



1.1.7 Eigenschaften der zweiten Form

Im Vergleich zur Funktion $y = f(x) = x^2$ hat der Graph der Funktion $y = f(x) = a \cdot (x - x_m)^2 + y_m$ die folgenden Eigenschaften:

$\lvert a\rvert > 1$	bedeutet eine Streckung in y – Richtung,	$\lvert a\rvert < 1$	bedeutet eine Stauchung in y-Richtung
$a > 0$	die Parabel ist nach oben geöffnet,	$a < 0$	die Parabel ist nach unten geöffnet
x_m	Verschiebung in x-Richtung	y_m	Verschiebung in y-Richtung
$M(x_m;y_m) \wedge a > 0$	M ist das Minimum	$M(x_m;y_m) \wedge a < 0$	M ist Maximum