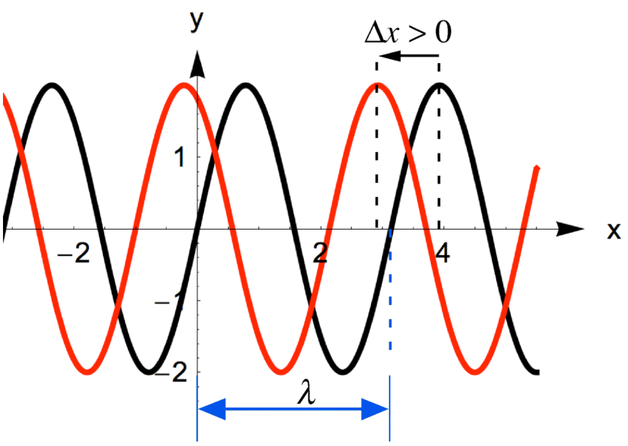
Die Phasenverschiebung von Funktionen

Dr. F. Raemy

Definitionen

In der Folge werden zwei häufig vorkommende Funktionen diskutiert. Links steht die Sinus-Funktion, die vom Ort x abhängig ist und rechts die in der Physik häufig auftretende harmonische Schwingung, eine Sinusfunktion, die von der Zeit abhängig ist.

f ist Funktion vom Ort x:



Die schwarze Funktion (ohne Phasenverschiebung)

$\boxed{y = f(x) = a\ \sin(k \cdot x)}$

Die rote Funktion ist örtlich phasenverschoben

$\boxed{y = f(x) = a\ \sin(k \cdot x + \Delta\varphi_x)}$

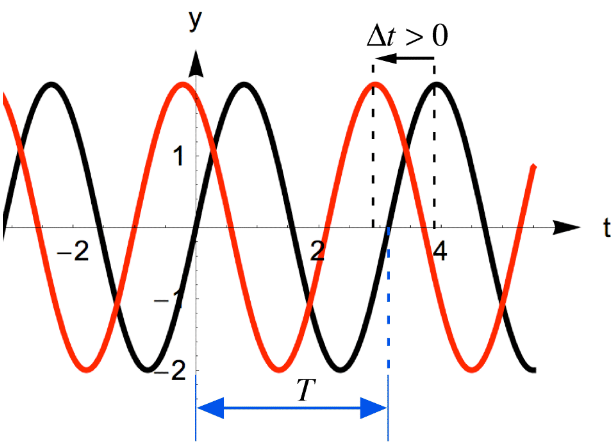
$\boxed{a}$ ist die Amplitude,

$\boxed{k := \frac{2\pi}{\lambda}}$ ist die **Wellenzahl**, definiert aus der **Wellenlänge** λ, dem Abstand von zwei **örtlich** phasengleichen Punkten.

$\boxed{\Delta\varphi_x = k \cdot \Delta x}$ ist die **örtliche Phasenverschiebung**.

Δx ist die Verschiebung bezüglich der exakt durch den Ursprung verlaufenden Sinusfunktion. Ist die rote Funktion nach rechts verschoben, dann ist $\Delta x < 0$, sonst ist $\Delta x > 0$.

f ist Funktion von der Zeit t:



Die schwarze Funktion (ohne Phasenverschiebung)

$\boxed{y = f(t) = a\ \sin(\omega \cdot t)}$

Die rote Funktion ist zeitlich phasenverschoben

$\boxed{y = f(t) = a\ \sin(\omega \cdot t + \Delta\varphi_t)}$

$\boxed{a}$ ist die Amplitude,

$\boxed{\omega := \frac{2\pi}{T}}$ ist die **Winkelgeschwindigkeit**, definiert aus der **Periode** T, dem Abstand von zwei **zeitlich** phasengleichen Punkten.

$\boxed{\Delta\varphi_t = \omega \cdot \Delta t}$ ist die **zeitliche Phasenverschiebung**.

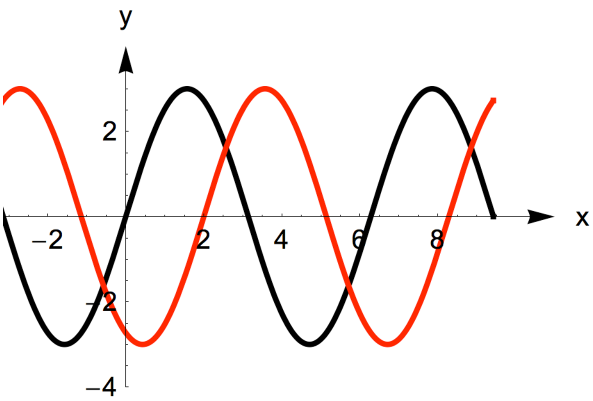
Δt ist die Verschiebung bezüglich der exakt durch den Ursprung verlaufenden Sinusfunktion. Ist die rote Funktion nach rechts verschoben, dann ist $\Delta t < 0$, sonst ist $\Delta t > 0$.

Es gibt unendlich viele Möglichkeiten durch Verschiebung die rote Funktion mit der schwarzen Funktion in Übereinstimmung zu bringen. Deshalb ist die Angabe der Funktion mit der Phasenverschiebung unendlich vieldeutig. Es gibt also unendlich viele Möglichkeiten die rote Funktion zu beschreiben.

Beispiel 1

Betrachten wir die folgende rote Funktion bezüglich der schwarzen durch den Ursprung des Koordinatensystems O(0;0) verlaufenden Funktion.

f ist Funktion vom Ort x:



Beide Funktionen haben die Amplitude $\boxed{a=3}$

Für die schwarze Funktion gilt:

$\boxed{y=f(x)=a\cdot\sin x \wedge k=1 \wedge \Delta\varphi_x=0}$

Für die rote Funktion gilt:

Die Wellenzahl ergibt sich aus dem Abstand der Punkte mit gleicher Phase.

$\boxed{\lambda=2\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k=\frac{2\pi}{\lambda}=1}$

Die rote Funktion ist um zwei Einheiten nach rechts verschoben.

$\boxed{\Delta x=-2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta\varphi_x=k\cdot\Delta x=-2}$

Die rote Funktion ist auch um $\Delta x=2\pi-2\approx 4{,}2832$ Einheiten nach links verschoben.

$\boxed{\Delta x=2\pi-2} \quad \Rightarrow \boxed{\Delta\varphi_x=k\cdot\Delta x=2\pi-2}$

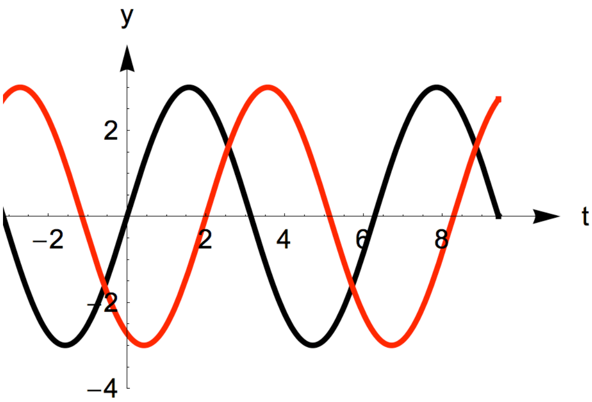
Die rote Funktion, welche rechts verschoben ist, lautet:

$\boxed{y=f(x)=3\cdot\sin(x-2)=-3\sin(2-x)}$

und jene, die links verschoben ist:

$$\boxed{\begin{array}{l} y=f(x)=3\cdot\sin\left(x+(2\pi-2)\right) \\ y=f(x)=-3\cdot\sin\left(x+(\pi-2)\right) \end{array}}$$

f ist Funktion von der Zeit t:



Beide Funktionen haben die Amplitude $\boxed{a=3}$

Für die schwarze Funktion gilt:

$\boxed{y=f(t)=a\cdot\sin t \wedge \omega=1 \wedge \Delta\varphi_t=0}$

Für die rote Funktion gilt:

Die Winkelgeschwindigkeit ergibt sich aus dem Abstand der Punkte mit gleicher Phase.

$\boxed{T=2\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega=\frac{2\pi}{T}=1}$

Die rote Funktion ist um zwei Einheiten nach rechts verschoben.

$\boxed{\Delta t=-2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta\varphi_t=\omega\cdot\Delta t=-2}$

Die rote Funktion ist auch um $\Delta t=2\pi-2\approx 4{,}2832$ Einheiten nach links verschoben.

$\boxed{\Delta t=2\pi-2} \quad \Rightarrow \boxed{\Delta\varphi_t=\omega\cdot\Delta t=2\pi-2}$

Die rote Funktion, welche rechts verschoben ist, lautet:

$\boxed{y=f(t)=3\cdot\sin(t-2)=-3\sin(2-t)}$

und jene, die links verschoben ist:

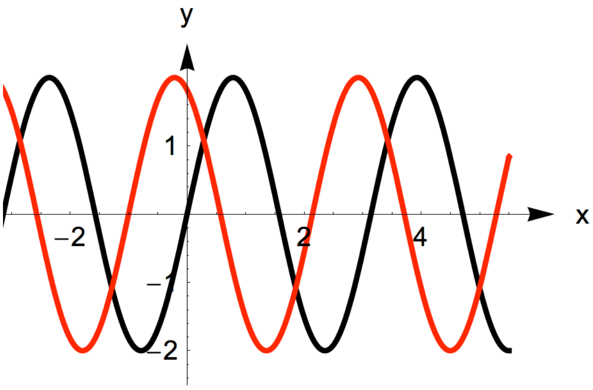
$$\boxed{\begin{array}{l} y=f(t)=3\cdot\sin\left(t+(2\pi-2)\right) \\ y=f(t)=-3\cdot\sin\left(t+(\pi-2)\right) \end{array}}$$

Es gibt also viele Möglichkeiten, eine Funktion zu beschreiben.

Beispiel 2

Betrachten wir die folgende rote Funktion bezüglich der schwarzen durch den Ursprung des Koordinatensystems O(0;0) verlaufenden Funktion.

f ist Funktion vom Ort x:



Die Amplitude ist $\boxed{a = 2}$.

Für die schwarze Funktion gilt: $\lambda = \pi$

$$\boxed{y = f(x) = a \cdot \sin 2x \wedge k = 2 \wedge \Delta\varphi_x = 0}$$

Für die rote Funktion gilt:

Die Wellenzahl k ergibt sich aus dem Abstand der Punkte mit gleicher Phase.

$$\boxed{\lambda = \pi} \Rightarrow \quad \boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2}$$

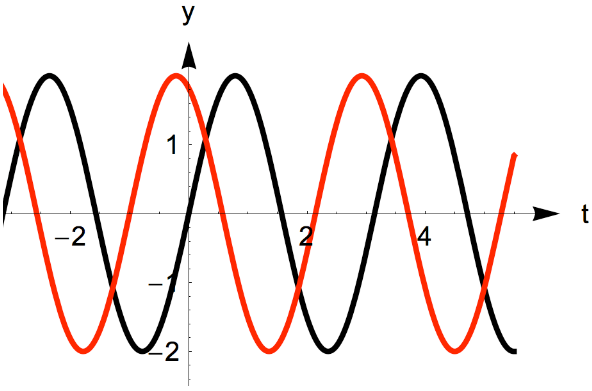
Die rote Funktion ist um eine Einheit nach links verschoben.

$$\boxed{\Delta x = 1} \Rightarrow \quad \boxed{\Delta\varphi_x = k \cdot \Delta x = 2}$$

Die rote Funktion lautet demnach

$$\boxed{\begin{array}{l} y = f(x) = 2 \cdot \sin(2 + 2x) = -2 \cdot \sin(-2x - 2) \\ y = f(x) = 2 \cdot \sin(2x - 2(\pi - 1)) \end{array}}$$

f ist Funktion von der Zeit t:



Die Amplitude ist $\boxed{a = 2}$.

Für die schwarze Funktion gilt: $T = \pi$

$$\boxed{y = f(t) = a \cdot \sin 2t \wedge \omega = 2 \wedge \Delta\varphi_t = 0}$$

Für die rote Funktion gilt:

Die Winkelgeschwindigkeit ω ergibt sich aus dem Abstand der Punkte mit gleicher Phase.

$$\boxed{T = \pi} \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2}$$

Die rote Funktion ist um eine Einheit nach links verschoben.

$$\boxed{\Delta t = 1} \Rightarrow \quad \boxed{\Delta\varphi_t = \omega \cdot \Delta t = 2}$$

Die rote Funktion lautet demnach

$$\boxed{\begin{array}{l} y = f(t) = 2 \cdot \sin(2 + 2t) = -2 \cdot \sin(-2t - 2) \\ y = f(t) = 2 \cdot \sin(2t - 2(\pi - 1)) \end{array}}$$