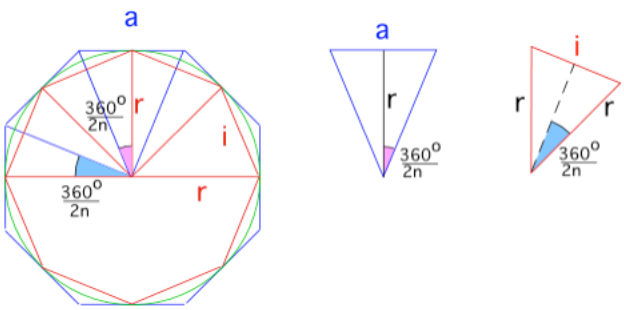
Le nombre π

Par quel nombre doit-on multiplier le diamètre d=2r du cercle pour obtenir le périmètre p du cercle ?

À partir du calcul du périmètre d'un polygone régulier de n côtés, on peut déterminer le nombre π. Nous considérons le polygone régulier de 8 côtés et nous généralisons plus tard à un polynôme de n côtés. Le polygone circonscrit bleu a un périmètre qui est plus grand que le périmètre du cercle vert. Le périmètre du polygone inscrit rouge à l'intérieur a un périmètre plus petit que le périmètre du cercle vert. Déterminons les longueurs des bases a et i des deux triangles :

$$\frac{\frac{i}{2}}{r} = \sin\frac{360^0}{16} \quad \Rightarrow \quad i = 2r \cdot \sin\frac{360^0}{16}$$

$$\frac{\frac{a}{2}}{r} = \tan\frac{360^0}{16} \quad \Rightarrow \quad a = 2r \cdot \tan\frac{360^0}{16}$$



Nous appelons le périmètre du cercle p. Alors on a pour le polygone régulier de 8 côtés:

$$\begin{aligned} n = 8: \Rightarrow \quad & 8 \cdot i \leq p \leq 8 \cdot a \\ & 8 \cdot \left(2r \cdot \sin\tfrac{360^0}{16}\right) \leq p \leq 8 \cdot \left(2r \cdot \tan\tfrac{360^0}{16}\right) \\ & 2r \cdot 3{,}06147 \leq p \leq 2r \cdot 3{,}31371 \end{aligned}$$

Le périmètre du polygone régulier de n côtés

Remplacer le polygone de 8 côtés par un polygone de n côtés nous donne la possibilité de limiter le périmètre p à gauche et à droite. Appelons **i** la longueur du côté du polygone inscrit et **a** la longueur du côté du polygone circonscrit.

$$n \cdot i \leq p \leq n \cdot a \qquad avec: \frac{i/2}{r} = \sin\left(\frac{360^0}{2 \cdot n}\right) \qquad triangle\ à\ l'intérieur$$

$$\frac{a/2}{r} = \tan\left(\frac{360^0}{2 \cdot n}\right) \qquad triangle\ à\ l'extérieur$$

Alors:

$$\boxed{2r \cdot n \cdot \sin\left(\frac{360^0}{2 \cdot n}\right) \leq p \leq 2r \cdot n \cdot \tan\left(\frac{360^0}{2 \cdot n}\right)}$$

Calculons le périmètre pour $n = 10^9$:

$$n = 10^9: \quad \Rightarrow 2r \cdot 10^9 \cdot \sin\frac{360^0}{2 \cdot 10^9} \leq p \leq 2r \cdot 10^9 \cdot \tan\frac{360^0}{2 \cdot 10^9}$$

$$\Rightarrow 2r \cdot 3{,}1415927 \leq p \leq 2r \cdot 3{,}1415927$$

Le nombre π et le périmètre du cercle

On a la valeur du nombre $\pi \approx 3{,}1415927 \pm 5 \cdot 10^{-8}$. L'augmentation de n nous fournit la valeur exacte de π

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} n \cdot \sin\left(\frac{360^0}{2 \cdot n}\right) = \pi} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\lim_{n \to \infty} n \cdot \tan\left(\frac{360^0}{2 \cdot n}\right) = \pi}$$

Le périmètre du cercle est donné par: $\boxed{p = 2\pi \cdot r}$