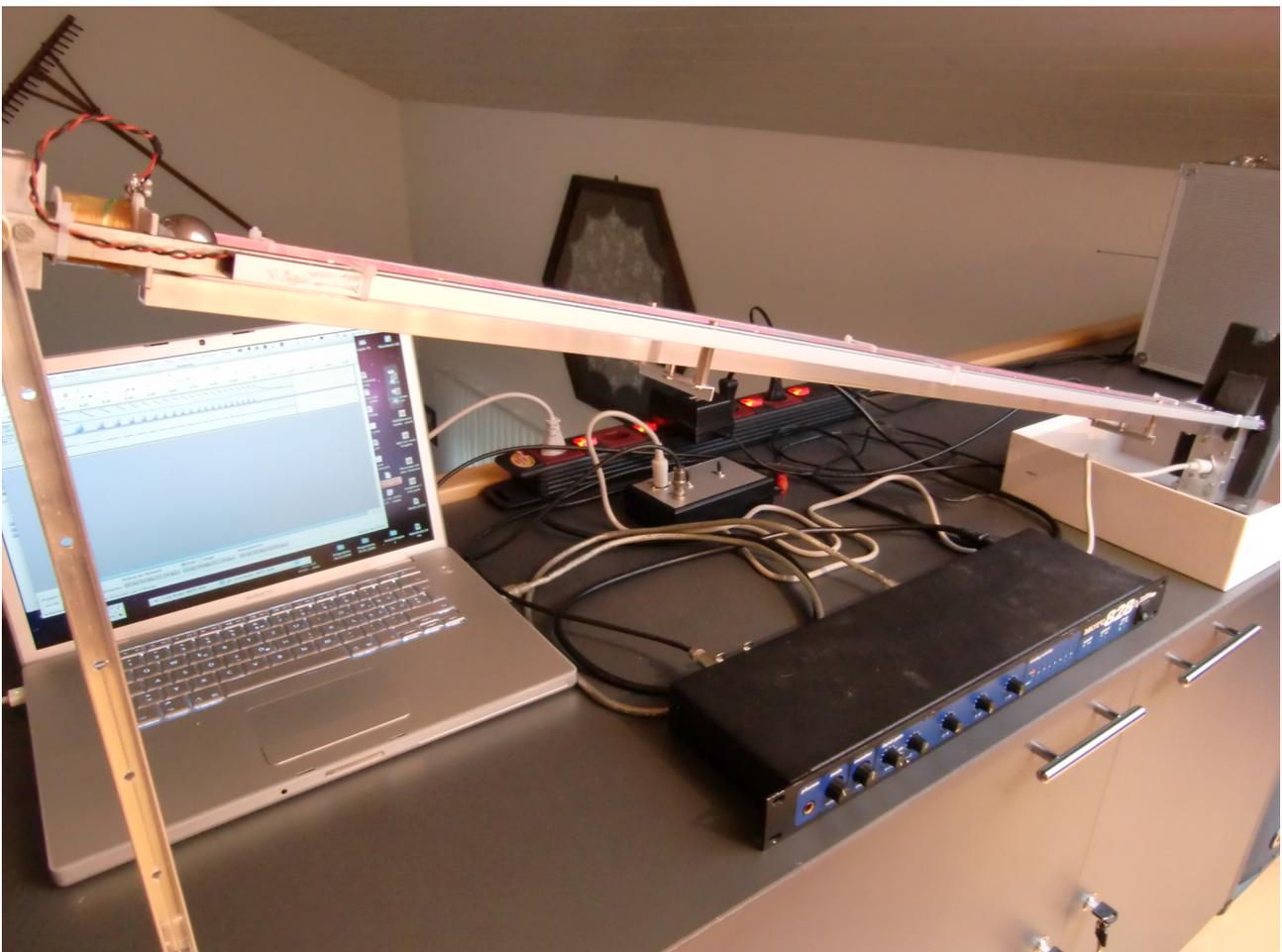


# Die Bestimmung der Beschleunigung und der Reibung einer rollenden Metallkugel im Experiment mit 21 Messungen während einem Durchlauf aufgezeichnet mit dem MOTU 828

von

Dr. Franz Raemy

im November 2010



## Einführung des Experimentes „Die schiefe Bahn“

In diesem Experiment soll aus der Messung von Ort und Zeit die Geschwindigkeit - Zeit Funktion gefunden werden. Daraus ergibt sich die experimentell bestimmte Beschleunigung  $a$ . Wir vergleichen diese Beschleunigung mit der theoretischen Beschleunigung, welche unter den Voraussetzungen gelten würde, wenn die Kugel keine Rotationsenergie hätte und keine Reibung existieren würde. Das Experiment zeigt, dass dieser vereinfachte Ansatz der Erklärung unzulässig ist. Aus der Energieerhaltung folgt die Transformation der potentiellen Energie in die kinetische Energie und die Rotationsenergie der Kugel und in die Wärmeenergie, die durch Rollreibung entsteht.

## Aufbau des Experimentes

Der experimentelle Aufbau zeigt links in der Abbildung 1 die Metallkugel, die durch einen Elektromagneten in der Startposition verharret, bis der Strom durch die Spule unterbrochen wird. Die LED Lichter liegen 5 cm auseinander, so dass auf einer Strecke von einem Meter genau 21 LED's für die Zeitmessung montiert sind.

Die Abbildung 2 rechts zeigt die schwarze Spannungsversorgung, die Steuerelektronik bestehend aus dem silbergrauen Steuergerät und dem schwarzblauen Motu 828, ein digitales Aufzeichnungsgerät für Wechselspannungen, das für die Aufzeichnung des Signals zuständig ist und dieses an einen Computer überträgt.



Abbildung 1 Metallkugel

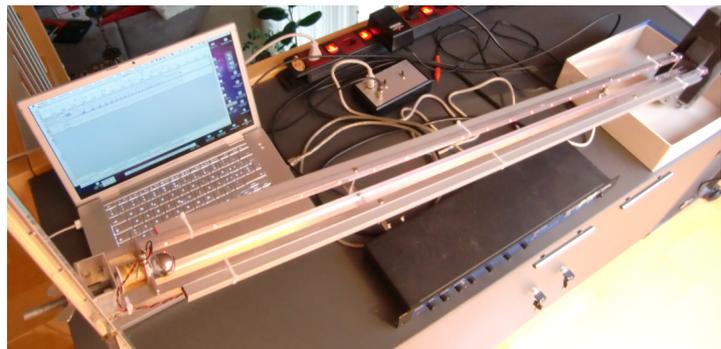


Abbildung 2 Elektronik und MOTU 828

## Die Bestimmung der Geschwindigkeits-Zeit- und der Orts-Zeit-Funktion

Die Geschwindigkeit der Kugel kann aus der Durchlaufzeit und Durchlaufstrecke bestimmt werden. Die Durchlaufstrecke zwischen zwei aufeinander folgender Lichtsensoren SFH229 beträgt 5 cm.

Das folgende Diagramm der Abbildung 3 zeigt die Spannungsaufzeichnung als Funktion der Zeit. Wirft die Kugel einen Schatten auf einen der 21 SFH229 Sensoren, dann fällt die Spannung auf den Minimalwert. Bei jedem Durchgang durch den Lichtstrahl entsteht ein Impuls wie er im folgenden Diagramm zu sehen ist. Es sind insgesamt 21 Messpunkte, die 5 cm Abstand voneinander haben.

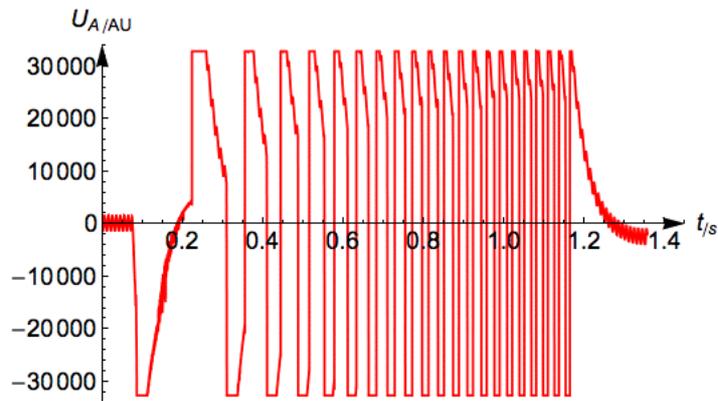


Abbildung 3 Das Zeitsignal aufgezeichnet durch das MOTU 828.

Der Neigungswinkel der Bahn bezüglich der Horizontalen beträgt  $15,25^\circ$ . Die digitalisierten Daten liegen im AIFF-Format zur Weiterverarbeitung in Mathematica bereit.

Ich bearbeite die AIFF Daten durch das Mathematica Programm. Das Programm liest die AIFF-Daten ein und berechnet daraus die Funktionen  $v(t)$  und  $x(t)$ .

Die Geschwindigkeit der Kugel als Funktion der Zeit erweist sich als ein linearer Zusammenhang gemäss der Abbildung 4a. Die Messung des Weges in Funktion der Zeit ist in 4b durch die roten Punkte festgehalten, während die blaue Parabel als Fit durch die Messpunkte oder durch Integration der Funktion  $v(t)$  berechnet werden kann.

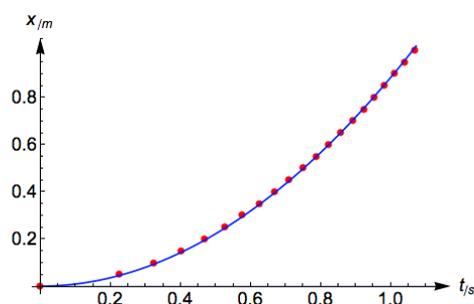
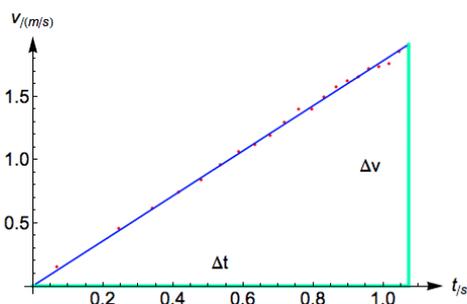


Abbildung 4

4a Geschwindigkeit in Funktion der Zeit

4b Weg in Funktion der Zeit

Die konstante Beschleunigung ergibt sich aus der Steigung der Geraden im v-t-Diagramm. In unserem Experiment ist die Beschleunigung:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 1,78 \text{ m/s}^2.$$

Die theoretisch vereinfachte Betrachtung der schiefen Bahn ohne Berücksichtigung der Reibung und der Rotationsenergie würde eine Beschleunigung  $a = 2,58 \text{ m/s}^2$  ergeben. Es existiert also eine sehr grosse Differenz zwischen dem experimentell ermittelten und dem theoretischen Wert der Beschleunigung.

Der lineare Zusammenhang zwischen v und t lässt sich mathematisch durch die folgende Formel darstellen:

$$v(t) = a \cdot t$$

Durch die Summierung, sprich Integration, erhält man auch den Zusammenhang zwischen Weg und Zeit.

$$x(t) = \int_0^t a \cdot t \cdot dt = a \frac{t^2}{2}$$

$$x(t) = \frac{a}{2} t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2x}{a}} \quad \Rightarrow \quad v(x) = a \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{2ax} = \sqrt{2a} \cdot \sqrt{x}$$

Die Funktion  $v(x) \sim \sqrt{x}$  ist eine Wurzelfunktion. Für den theoretischen Wert von

$$a = 1,78 \text{ m/s}^2 \text{ ist } \sqrt{2a} = 1,887 \frac{\sqrt{\text{m}}}{\text{s}}$$

Die Messung zeigt  $v(x)$  für  $\sqrt{2a} = 1,887 \frac{\sqrt{\text{m}}}{\text{s}}$

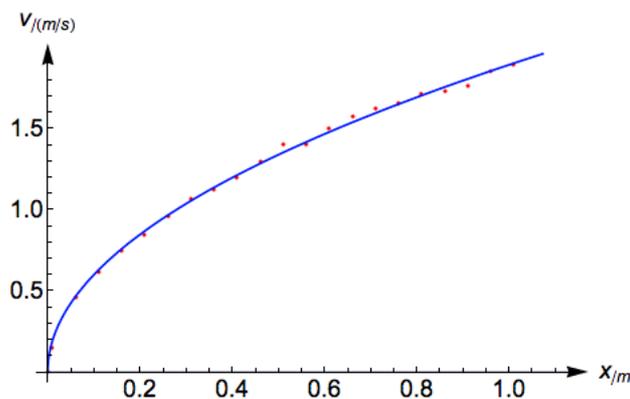


Abbildung 5 Die Geschwindigkeit als Funktion des Weges  
(Die blaue Kurve ist berechnet und rot sind die Messpunkte)

Die Differenz der gemessenen und der theoretischen Beschleunigung unter der Annahme, dass keine Reibung vorhanden ist und die Rotationsenergie der Kugel vernachlässigt werden kann, verlangt eine umfassendere Analyse des Experimentes. Wir bestimmen aus der Energieerhaltung den Reibungskoeffizienten.

## Bestimmung des Reibungskoeffizienten

Wir bestimmen den Reibungskoeffizienten unter Berücksichtigung der Rotationsenergie der Kugel.

Die Energieerhaltung liefert uns den folgenden Zusammenhang. Die potentielle Energie wird in kinetische Energie und Rotationsenergie der Kugel sowie in Wärme umgewandelt. Hier bedeuten  $I$  das Trägheitsmoment der Kugel,  $F_R$  die Reibungskraft.

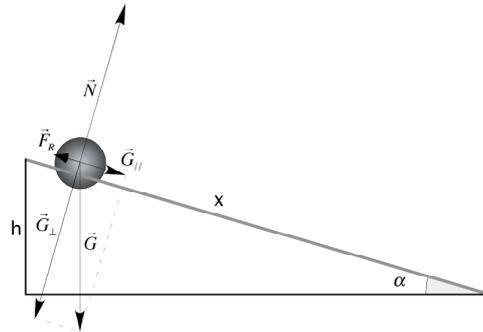


Abbildung 6 die schiefe Bahn

$$E_{pot} = E_{kin} + E_{rot} + E_{\Delta Q} \quad \Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}m \cdot v^2 + \frac{1}{2}I \cdot \omega^2 + F_R \cdot x$$

$$\wedge \quad \boxed{I = \frac{2}{5}m \cdot r^2} \quad \wedge \quad v = \omega \cdot r \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \frac{v}{r}}$$

$$F_R = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}m \cdot r^2 \cdot \omega^2 + \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot x$$

$$\Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}m \cdot v^2 + \frac{1}{5}m \cdot v^2 + \mu mg \cos \alpha \cdot x$$

$$\Rightarrow \quad gh = \frac{7}{10}v^2 + \mu \cdot g \cdot x \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mu = \frac{g \cdot x \cdot \sin \alpha - \frac{7}{10}v^2}{g \cdot x \cdot \cos \alpha} = \tan \alpha - \frac{7}{10} \cdot \frac{v^2}{g \cdot x \cdot \cos \alpha}}$$

## Bestimmung des Fehlers des Reibungskoeffizienten

Der absolute Grösstfehler des Reibungskoeffizienten nach Gauss berechnet sich aus:

$$\Delta\mu = \left| \frac{\partial\mu}{\partial\alpha} \Delta\alpha \right| + \left| \frac{\partial\mu}{\partial a} \Delta a \right| + \left| \frac{\partial\mu}{\partial t} \Delta t \right| + \left| \frac{\partial\mu}{\partial x} \Delta x \right|$$

Darin werden die partiellen Ableitungen mit den Fehlerabschätzungen multipliziert.

$$\frac{\partial\mu}{\partial\alpha} \Delta\alpha = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} - \frac{7 \cdot a^2 \tan(\alpha)}{10gx \cos(\alpha)}$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial a} \Delta a = -\frac{7 \cdot a \cdot t^2}{5gx}$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} \Delta t = -\frac{7 \cdot t \cdot a^2}{5gx}$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} \Delta x = \frac{7 \cdot a^2}{10gx^2 \cos(\alpha)}$$

Daraus folgt der absolute maximale Fehler des Reibungskoeffizienten nach Gauss.

$$\boxed{\Delta\mu = \left| \frac{1}{\cos^2(\alpha)} - \frac{7 \cdot a^2 \tan(\alpha)}{10gx \cos(\alpha)} \right| + \left| -\frac{7 \cdot a \cdot t^2}{5gx} \right| + \left| -\frac{7 \cdot t \cdot a^2}{5gx} \right| + \left| \frac{7 \cdot a^2}{10gx^2 \cos(\alpha)} \right|}$$

## Die Steuerelektronik

Die Steuerelektronik ist eine Eigenentwicklung, die gut definierte Signale erzeugt. Der Schatten der Kugel beim Durchgang durch eine Lichtschranke erzeugt einen Übergang auf die negative Minimalspannung von  $-2^{15}$  bit .

Die Abbildung 7 zeigt das Steuergerät mit den 6 Steuerleitungen des Aus- und Eingangs (Exp) dem Ausgang für das Motu 828 und den beiden Schaltern für die LED Beleuchtung und dem Steuerstrom für das B-Feld, welches die Metallkugel vor dem Fall zurück hält.



Abbildung 7 Steuerelektronik

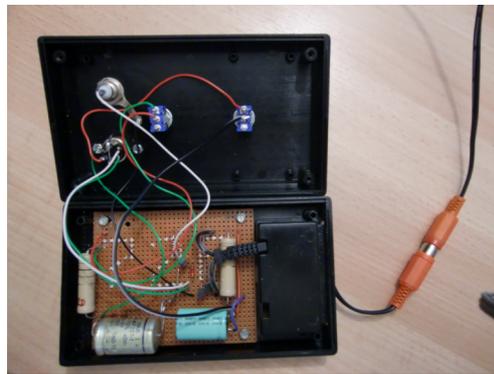


Abbildung 8 das offene Steuergerät

## Die Spannungsversorgung

Die Spannungsversorgung kann mit zwei Netzgeräten der folgenden Abbildungen 9 oder 10 erfolgen. Die Spannung kann bis 15 Volt betragen.

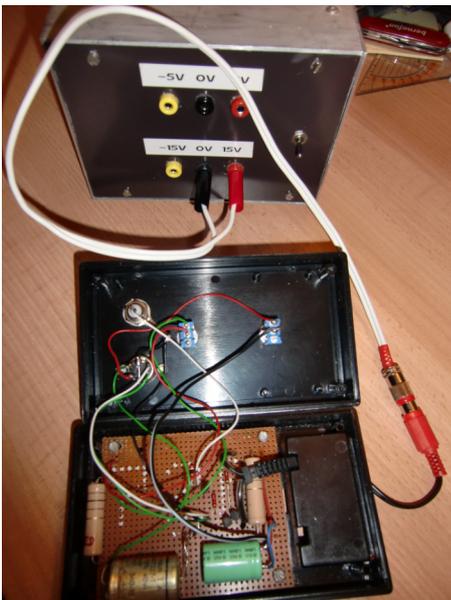


Abbildung 9 offenes Steuergerät mit Spannungsquelle 15V

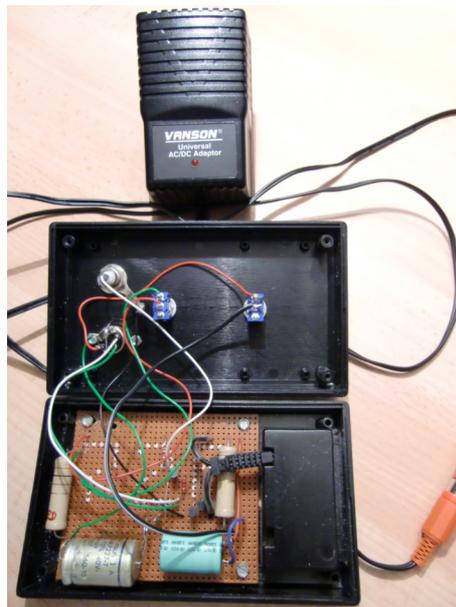


Abbildung 10 offenes Steuergerät mit Spannungsquelle 12V