Mathematik **erstes Semester** **2011**

NAME:________________________ Vorname :____________________________

Bemerkungen:	**Schreiben Sie die Lösungen sauber und lesbar.** **Geben Sie die Nummer der Aufgabe an. Unterstreichen Sie die Resultate.** **Viel Glück!**

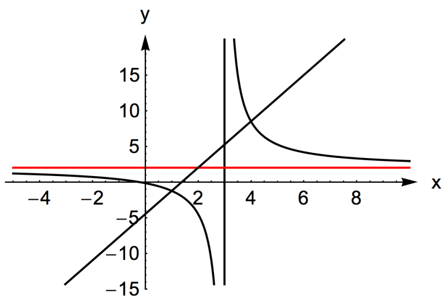
Aufgabe 1 (7 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{4x+1}{2x-6}$ und die Gerade $g(x)=\frac{13}{4}x-\frac{9}{2}$.

a) Berechnen Sie den Definitionsbereich, die Pole und die horizontalen Asymptoten der Funktion $f(x)$.

$$\boxed{D_x=\mathbb{R}\setminus\{3\}},\ Pol:\ \boxed{x=3},\ horiz.\ As:(x+4):(x-2)=2+\frac{13}{2x-6}\quad\Rightarrow\quad\boxed{y=2}$$ **[3]**

b) Stellen Sie im gleichen Koordinatensystem $f(x)$ und die Gerade $g(x)$ dar.



[2]

c) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Geraden $g(x)$ mit der Funktion $f(x)$.

$$f(x)=\frac{4x+1}{2x-6}=g(x)=\frac{13}{4}x-\frac{9}{2}\quad\Rightarrow\quad 4x+1=(2x-6)\left(\frac{13}{4}x-\frac{9}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 16x+4=26x^2-114x+108\quad\Rightarrow\quad x^2-5x+4=0\Rightarrow\quad 3x(x-3)=0$$ **[2]**

$$\Rightarrow x_{1;2}=\tfrac{5}{2}\pm\sqrt{\tfrac{25}{4}-\tfrac{16}{4}}=\tfrac{5}{2}\pm\tfrac{3}{2}\quad\Rightarrow\quad\boxed{S_1\left(1;-\tfrac{5}{4}\right)\vee S_2\left(4;\tfrac{17}{2}\right)}$$

Aufgabe 2 (8 Punkte)

a) Ein Kreis mit dem Radius 20 cm befindet sich **in** einem regelmässigen Sechseck. Zeichnen Sie die Situation. Das Sechseck bildet die Grundfläche einer geraden Pyramide. Berechnen Sie die Höhe h der Pyramide, wenn das Volumen der Pyramide wie folgt bekannt ist.

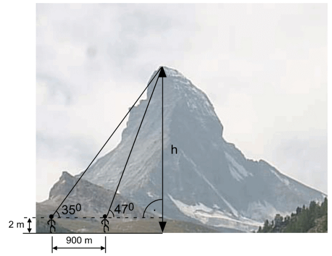
$$V=\frac{2000\pi}{3}\ cm^3$$

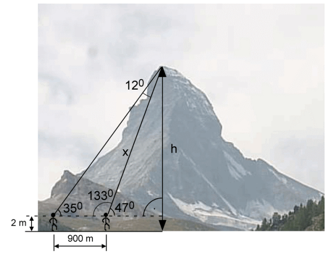
Lösung:

$$s=2r\ \tan\left(30^0\right)=2r\frac{\sqrt{3}}{3}\quad\Rightarrow\quad F_\Delta=\frac{s\cdot r}{2}=r^2\ \tan\left(30^0\right)=r^2\frac{\sqrt{3}}{3}$$ **[4]**

$$V=\frac{6F_\Delta h}{3}=2F_\Delta h\quad\Rightarrow\quad\boxed{h=\frac{V}{2F_\Delta}=4{,}5345\ cm}$$

b) Aus den Kenntnissen der nachfolgenden Figur bestimme man die Höhe des Berges.





Lösung:

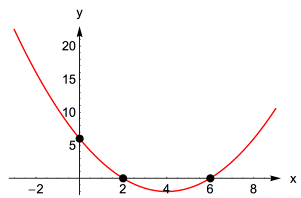
$$\frac{x}{900m}=\frac{\sin 35^0}{\sin 12^0}\quad\Rightarrow\quad x=900m\frac{\sin 35^0}{\sin 12^0}$$

$$\sin 47^0=\frac{h}{x}\quad\Rightarrow\quad h=x\sin 47^0$$ **[4]**

$$h_{Berg}=h+2m\quad\Rightarrow\quad\boxed{h_{Berg}=1817{,}86\ m}$$

Aufgabe 3 (9 Punkte)

a) Bestimmen Sie aus der Darstellung der Parabel die Funktion vom zweiten Grade in der Form $y=f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$.



Lösung:

$$\left.\begin{array}{lll}P_1(0;6)\in k & \Rightarrow & c=6\\ P_2(0;2)\in k & \Rightarrow & 4a+2b+6=0\\ P_3(0;6)\in k & \Rightarrow & 36a+6b+6=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}4a+2b+6=0\\36a+6b+6=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}12a+6b+18=0\\36a+6b+6=0\end{array}\right\}\Rightarrow 24a=12$$

$$\Rightarrow\boxed{a=\frac{1}{2}}\quad\boxed{b=-4}\quad\boxed{c=6}\quad\Rightarrow\quad\boxed{y=f(x)=\frac{1}{2}\cdot x^2-4\cdot x+6}$$

[3]

b) Bestimmen Sie die Geradengleichung durch die Punkte $A(-1;3)$ und $B(4;1)$.

gesucht: g : $\quad y = m\cdot x + b$

$$\left.\begin{array}{lll} A(-1;3)\in g & \Rightarrow & 3=-m+b \\ B(4;1)\in g & \Rightarrow & 1=4m+b \end{array}\right\} \Rightarrow 5m=-2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m=-\frac{2}{5}}\boxed{b=\frac{13}{5}}\boxed{y=-\frac{2}{5}x+\frac{13}{5}}$$

[3]

c) Bestimmen Sie den Definitionsbereich der folgenden Funktion:

$$y=f(x)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}x^2-4x+6}}$$

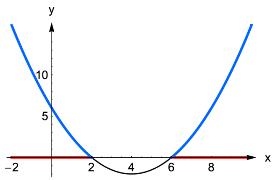
$\frac{1}{2}x^2-4x+6>0 \qquad \textit{Berechnung der Nullstellen}: \frac{1}{2}x^2-4x+6=0 \quad \Rightarrow x^2-8x+12=0$

$x_{1;2}=4\pm\sqrt{16-12}=4\pm 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1=2} \quad \vee \quad \boxed{x_2=6}$

$\Rightarrow \quad \boxed{D_x=\{x\mid x<2 \vee x>6\}}$

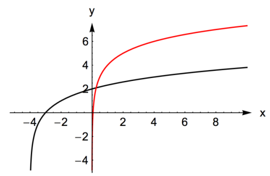
[3]

Erklärung:



Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Zeichnen Sie im folgenden Koordinatensystem die Funktionen $y=f(x)=\log_2(x+4)$ und $y=f(x)=\log_2(x)+4$



[2]

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung: $\quad \lg(x+3)+\lg(x)=1$

gesucht: $L_x\subset D_x$

$D_x=\mathbb{R}^+$

$\lg[(x+3)x]=1 \quad \Rightarrow \quad x^2+3x=10 \quad \Rightarrow x^2+3x-10=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1;2}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+10}$

$x_{1;2}=-\frac{3}{2}\pm\frac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1=2\in D_x \quad x_2=-5\notin D_x \quad \Rightarrow \quad \boxed{L_x=\{2\}}$

[4]

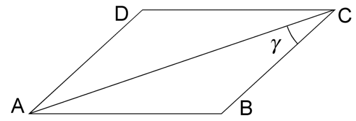
c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion der Funktion $\quad y=f(x)=-2\cdot 3^{x+4}$

gesucht: $f^{-1}(x)$

$x=-2\cdot 3^{y+4} \quad \Rightarrow -\frac{x}{2}=3^{y+4} \quad \Rightarrow y+4=\log_3\left(-\frac{x}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y=f^{-1}(x)=\log_3\left(-\frac{x}{2}\right)-4}$

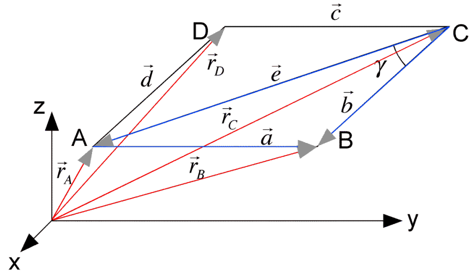
[4]

Aufgabe 5 (10 Punkte)



Gegeben sind die drei Punkte $A(4;2;-6)$, $B(-2;8;12)$ und $C(10;4;2)$ eines Dreiecks im Raum.

a) Bestimmen Sie den Winkel $\gamma = \measuredangle(ACB)$.



$$\gamma=\arccos\left(\frac{\vec{e}\cdot\vec{b}}{e\cdot b}\right)=\arccos\left(\frac{(\vec{r}_A-\vec{r}_C)\cdot(\vec{r}_B-\vec{r}_C)}{e\cdot b}\right)$$

$$\vec{e}=\vec{r}_A-\vec{r}_C=\begin{pmatrix}4\\2\\-6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-2\\-8\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e=\sqrt{36+4+64}=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$$

$$\vec{b}=\vec{r}_B-\vec{r}_C=\begin{pmatrix}-2\\8\\12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\4\\10\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad b=\sqrt{144+16+100}=\sqrt{260}=2\sqrt{65}$$

[5]

$$\Rightarrow \gamma=\arccos\frac{\begin{pmatrix}-6\\-2\\-8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-12\\4\\10\end{pmatrix}}{\sqrt{104}\sqrt{260}}=\arccos\frac{72-8-80}{\sqrt{104}\sqrt{260}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma=95{,}5837^0}$$

b) Bestimmen Sie D so, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.

$$\vec{r}_D=\vec{r}_A-(\vec{r}_B-\vec{r}_C)=\vec{r}_A-\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\2\\-6\end{pmatrix}-\left[\begin{pmatrix}-2\\8\\12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10\\4\\2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}4\\2\\-6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-12\\4\\10\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{\vec{r}_D=\begin{pmatrix}16\\-2\\-16\end{pmatrix}}$$

[2]

c) Berechnen Sie den Umfang des Parallelogramms ABCD.

$U=a+b+c+d=2a+2b$

$$\vec{a}=\vec{r}_B-\vec{r}_A=\begin{pmatrix}-2\\8\\12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\2\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\6\\18\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a=\sqrt{36+36+324}=\sqrt{396}=6\sqrt{11}$$

[3]

$\textit{von Aufgabe a)} \qquad b=\sqrt{144+16+100}=\sqrt{260}=2\sqrt{65}$

$U=12\sqrt{11}+4\sqrt{65} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U=72{,}0485}$