Das Horner-Verfahren anstelle der Polynomdivision

von

Dr. F. Raemy

Das Horner-Verfahren dient wie die Polynomdivision der Abspaltung von Linearfaktoren von Polynomen. Zudem kann mit dem Horner-Verfahren der Funktionswert des Polynoms berechnet werden.

Das **Horner-Verfahren** dient

1 zur schnellen Berechnung von Funktionswerten eines Polynoms,
2 zum schnellen Abspalten eines Linearfaktors von einem Polynom.

Horner-Darstellung eines Polynoms:
Das Polynom n-ten Grades

$$\boxed{p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}$$

kann durch fortgesetztes Ausklammern von x auf die folgende Gestalt gebracht werden:

(*) $$\boxed{p(x)=\left(\ldots\left(\left(a_nx+a_{n-1}\right)x+a_{n-2}\right)x+\ldots+a_1\right)x+a_0}$$

Nun soll p(x) für $x = x_0$ berechnet werden.
Dazu werden die Zahlen c_n, c_{n-1}, … , c_1, c_0 wie folgt definiert; sie sollen die Werte der in (*) auftretenden Klammern (in der Reihenfolge von innen nach außen) für $x = x_0$ darstellen. Die Berechnung ist „rekursiv von oben nach unten", d. h., die Berechnung von c_k setzt die Kenntnis des Wertes von c_{k+1} voraus ($k\in\{0;1;\ldots;n-1\}$):

$$\begin{aligned}
c_n &:= a_n\\
c_{n-1} &:= c_nx_0 + a_{n-1}\\
c_{n-2} &:= c_{n-1}x_0+ a_{n-2}\\
&\vdots\\
c_k &:= c_{k+1}x_0 + a_k\\
&\vdots\\
c_0 &:= c_1x_0 + a_0
\end{aligned}$$

Wegen (*) gilt dann: $c_0 = p(x_0)$

Und das ist das **Horner-Verfahren zur Polynomauswertung**. Außerdem kann p(x) in der folgenden Form dargestellt werden:

$$\boxed{p(x)=(x-x_0)\left(c_nx^{n-1}+c_{n-1}x^{n-2}+\ldots+c_2x+c_1\right)}$$

Beweis: Durch Ausmultiplizieren der rechten Seite und Koeffizientenvergleich.

Folgerung:
Sei nun x_0 eine Nullstelle von p(x), gelte also $p(x_0) = 0$.
Dann gilt: $p(x)=(x-x_0)\left(c_nx^{n-1}+c_{n-1}x^{n-2}+\ldots+c_2x+c_1\right)$
Man kann also mit Hilfe des Horner-Verfahrens den Linearfaktor $(x – x_0)$ von p(x) abdividieren, also das Polynom $p(x)/(x – x_0)$ berechnen. Dieses hat den Grad n-1.

Und das ist das **Horner-Verfahren zum Abspalten eines Linearfaktors** (einsetzbar anstelle einer Polynomdivision).

Das **Horner-Schema** verhilft zum schnellen Berechnen der gesuchten Koeffizienten c_n , …, c_0.

Horner-Schema

Gegeben: das Polynom $p(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ und die Zahl x_0, die entweder eine Nullstelle von p(x) darstellt (Ziel: Abspaltung des zugehörigen Linearfaktors) oder für die der Wert des Polynoms berechnet werden soll.
Man schreibt zunächst in die 1. Zeile einer Tabelle die Koeffizienten a_n, …, a_0 in dieser Reihenfolge. Die 2. Zeile lässt man zunächst frei. In die 3. Zeile schreibt man unterhalb von a_n die Zahl c_n (= a_n).
Dann multipliziert man c_n mit x_0 und trägt das Ergebnis in das 2. Feld der 2. Zeile ein, also unterhalb von a_{n-1}. Sodann addiert man die beiden Zahlen (a_{n-1} und c_nx_0) in der 2. Spalte und schreibt sie darunter in die 3. Zeile. Das ist dann der Koeffizient c_{n-1}.
Dann multipliziert man das so gewonnene c_{n-1} mit x_0 und trägt das Ergebnis in das 3. Feld der zweiten Zeile ein (unterhalb von a_{n-2}). Die Summe von a_{n-2} und $c_{n-1}x_0$ schreibt man danach direkt darunter in die 3. Zeile. Das ist der Koeffizient c_{n-2}. Und so weiter …
Das sieht dann wie folgt aus:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	…	a_1	a_0
+		c_nx_0	$c_{n-1}x_0$	…	c_2x_0	c_1x_0
	c_n (= a_n)	c_{n-1}	c_{n-2}	…	c_1	$c_0 = p(x_0)$

Beispiele:
(a) Für das Polynom $p(x)=6x^6-3x^5+2x^2+4$ soll p(2) berechnet werden:

x_0 = 2

	6	-3	0	0	2	0	4
+		12	18	36	72	148	296
	6	9	18	36	74	148	300 =p(2)

(b) Das Polynom $p(x)=6x^6-3x^5+2x^2-296$ hat die Nullstelle $x_0 = 2$.
Es soll von p(x) der Linearfaktor (x-2) abgespalten werden:

x_0 = 2

	6	-3	0	0	2	0	-296
+		12	18	36	72	148	296
	6	9	18	36	74	148	0 = p(2)

Die Koeffizienten der letzten Zeile sind die Koeffizienten des Polynoms vom Grade n-1.

Resultat:

$$p(x)=6x^6-3x^5+2x^2-296=(x-2)\cdot\left(6x^5+9x^4+18x^3+36x^2+74x+148\right)$$