Lösung der Aufgabe 19 : zweidimensionaler Stoss

Gegeben:

$$m_1 = 20\ kg \quad ; \quad m_2 = 10\ kg \quad \Rightarrow m_1 = 2m_2$$

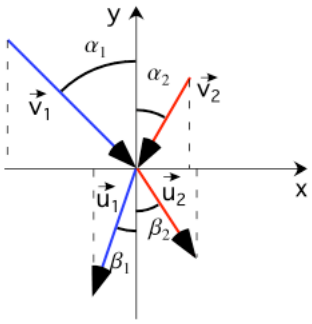
$$v_1 = 2\ \tfrac{m}{s} \quad ; \quad v_2 = 1\ \tfrac{m}{s} \quad \Rightarrow v_1 = 2v_2$$

Gesucht:

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \end{pmatrix};\ \beta_1\ ; \qquad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} u_{2x} \\ u_{2y} \end{pmatrix};\ \beta_2$$

Lösung:

Skizze



Beim Stoss ist die zentrale Achse parallel zur x-Achse. Das bedeutet, dass Energie und Impuls nur in x-Richtung ausgetauscht werden können.

$$u_{y1} = v_{y1};\ u_{y2} = v_{y2}$$

Weiter gilt die Energieerhaltung und die Impulserhaltung in x-Richtung:

$$E_x: \quad m_1 v_{x1}^2 + m_2 v_{x2}^2 = m_1 u_{1x}^2 + m_2 u_{2x}^2 \qquad 1)$$

$$p_x: \quad m_1 v_{x1} - m_2 v_{x2} = -m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} \qquad 2)$$

$$E_x: \quad 2v_{x1}^2 + v_{x2}^2 = 2u_{x1}^2 + u_{x2}^2 \qquad 1)$$

$$p_x: \quad 2v_{x1} - v_{x2} = -2u_{x1} + u_{x2} \qquad 2) \qquad \Rightarrow u_{x2} = 2u_{x1} + 2v_{x1} - v_{x2} \qquad \rightarrow 1)$$

$$\Rightarrow \quad 2v_{x1}^2 + v_{x2}^2 = 2u_{x1}^2 + \left(2u_{x1} + 2v_{x1} - v_{x2}\right)^2 \qquad 3)$$

Zwischenrechnung: Quadrieren eines Trinoms

$$\begin{array}{lcccccc}
(2a+2b-c)(2a+2b-c) = & 4a^2 & +4ab & -2ac & & & \\
 & & +4ab & & +4b^2 & -2bc & \\
 & & & -2ac & & -2bc & +c^2 \\
\hline
(2a+2b-c)(2a+2b-c) = & 4a^2 & +8ab & -4ac & +4b^2 & -4bc & +c^2
\end{array}$$

Damit wird aus der Gleichung 3)

$$\Rightarrow \quad 2v_{x1}^2 + v_{x2}^2 = 2u_{x1}^2 + 4u_{x1}^2 + 8u_{x1}v_{x1} - 4u_{x1}v_{x2} + 4v_{x1}^2 - 4v_{x1}v_{x2} + v_{x2}^2$$

$$\Rightarrow \quad 6u_{x1}^2 + \left(8v_{x1} - 4v_{x2}\right)u_{x1} - 4v_{x1}v_{x2} + 2v_{x1}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad u_{x1}^2 + \left(\tfrac{4}{3}v_{x1} - \tfrac{2}{3}v_{x2}\right)u_{x1} - \tfrac{3}{2}v_{x1}v_{x2} + \tfrac{1}{3}v_{x1}^2 = 0$$

Die letzte Gleichung ist eine quadratische Gleichung deren Lösungen wir wie folgt bestimmen:

$$\Rightarrow \quad u_{x1} = -\left(\tfrac{2}{3}v_{x1} - \tfrac{1}{3}v_{x2}\right) \pm \sqrt{\left(\tfrac{2}{3}v_{x1} - \tfrac{1}{3}v_{x2}\right)^2 + \tfrac{3}{2}v_{x1}v_{x2} - \tfrac{1}{3}v_{x1}^2}$$

$$\Rightarrow \quad u_{x1} = -\left(\tfrac{2}{3}v_{x1} - \tfrac{1}{3}v_{x2}\right) \pm \sqrt{\tfrac{4}{9}v_{x1}^2 - \tfrac{4}{9}v_{x1}v_{x2} + \tfrac{1}{9}v_{x2}^2 + \tfrac{3}{2}v_{x1}v_{x2} - \tfrac{1}{3}v_{x1}^2}$$

$$\Rightarrow \quad u_{x1} = -\left(\tfrac{2}{3}v_{x1} - \tfrac{1}{3}v_{x2}\right) \pm \sqrt{\tfrac{1}{9}v_{x1}^2 + \tfrac{2}{9}v_{x1}v_{x2} + \tfrac{1}{9}v_{x2}^2}$$

$$\Rightarrow \quad u_{x1} = -\left(\tfrac{2}{3}v_{x1} - \tfrac{1}{3}v_{x2}\right) \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{v_{x1}^2 + 2v_{x1}v_{x2} + v_{x2}^2}$$

$$\Rightarrow \quad u_{x1} = -\left(\tfrac{2}{3}v_{x1} - \tfrac{1}{3}v_{x2}\right) \pm \tfrac{1}{3}\left(v_{x1} + v_{x2}\right)$$

Daraus folgt die erste Lösung

$$\Rightarrow \quad u_{x1} = -\left(\tfrac{2}{3}v_{x1} - \tfrac{1}{3}v_{x2}\right) + \tfrac{1}{3}\left(v_{x1} + v_{x2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad u_{x1} = -\tfrac{1}{3}v_{x1} + \tfrac{2}{3}v_{x2} \qquad \wedge \qquad u_{x2} = -\tfrac{2}{3}v_{x1} + \tfrac{4}{3}v_{x2} + 2v_{x1} - v_{x2}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{u_{x1} = \tfrac{1}{3}\left(2v_{x2} - v_{x1}\right)}} \qquad \wedge \qquad \underline{\underline{u_{x2} = \tfrac{1}{3}\left(4v_{x1} + v_{x2}\right)}}$$

oder die zweite Lösung:

$$\Rightarrow \quad u_{x1} = -\left(\tfrac{2}{3}v_{x1} - \tfrac{1}{3}v_{x2}\right) - \tfrac{1}{3}\left(v_{x1} + v_{x2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad u_{x1} = -v_{x1} \qquad \wedge \qquad u_{x2} = -2v_{x1} + 2v_{x1} - v_{x2}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{u_{x1} = -v_{x1}}} \qquad \wedge \qquad \underline{\underline{u_{x2} = -v_{x2}}}$$

Die numerische Lösung

$$\sin\alpha_1 = \sin 45^0 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \sin\alpha_2 = \sin 30^0 = \tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow v_{x1} = v_1 \sin 45^0 = \tfrac{2}{\sqrt{2}}\tfrac{m}{s} = \sqrt{2}\,\tfrac{m}{s} \quad ; \quad v_{x2} = v_2 \sin 30^0 = \tfrac{1}{2}\tfrac{m}{s}$$

$$\Rightarrow v_{y1} = v_1 \cos 45^0 = \tfrac{2}{\sqrt{2}}\tfrac{m}{s} = \sqrt{2}\,\tfrac{m}{s} \quad ; \quad v_{y2} = v_2 \cos 30^0 = \sqrt{\tfrac{3}{4}}\,\tfrac{m}{s}$$

somit folgt für die erste Lösung:

$$u_{x1} = \tfrac{1}{3}\left(1 - \sqrt{2}\right)\tfrac{m}{s} \quad ; \quad u_{x2} = \tfrac{1}{6}\left(8\sqrt{2} + 1\right)\tfrac{m}{s}$$

$$u_{y1} = v_{y1} = v_1 \cos\alpha_1 = 2\sqrt{2}\,\tfrac{m}{s} \quad ; \quad u_{y2} = v_1 \sin\alpha_2 = \sqrt{\tfrac{3}{4}}\,\tfrac{m}{s}$$

$$\beta_1 = \arctan\tfrac{\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}} = 5{,}5762^0 \quad ; \quad \beta_2 = \arctan\tfrac{1+8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = 67{,}1212^0$$

und für die zweite Lösung:

$$u_{x1} = -\sqrt{2}\,\tfrac{m}{s} \quad ; \quad u_{x2} = -\tfrac{1}{2}\tfrac{m}{s}$$

$$u_{y1} = v_{y1} = v_1 \cos\alpha_1 = 2\sqrt{2}\,\tfrac{m}{s} \quad ; \quad u_{y2} = v_1 \sin\alpha_2 = \sqrt{\tfrac{3}{4}}\,\tfrac{m}{s}$$

$$\beta_1 = \arctan 1 = 45^0 \quad ; \quad \beta_2 = \arctan\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = 30^0$$

Interpretation

Die erste Lösung gibt die Situation nach dem Stoss an. Die zweite Lösung steht für die Situation vor dem Stoss.