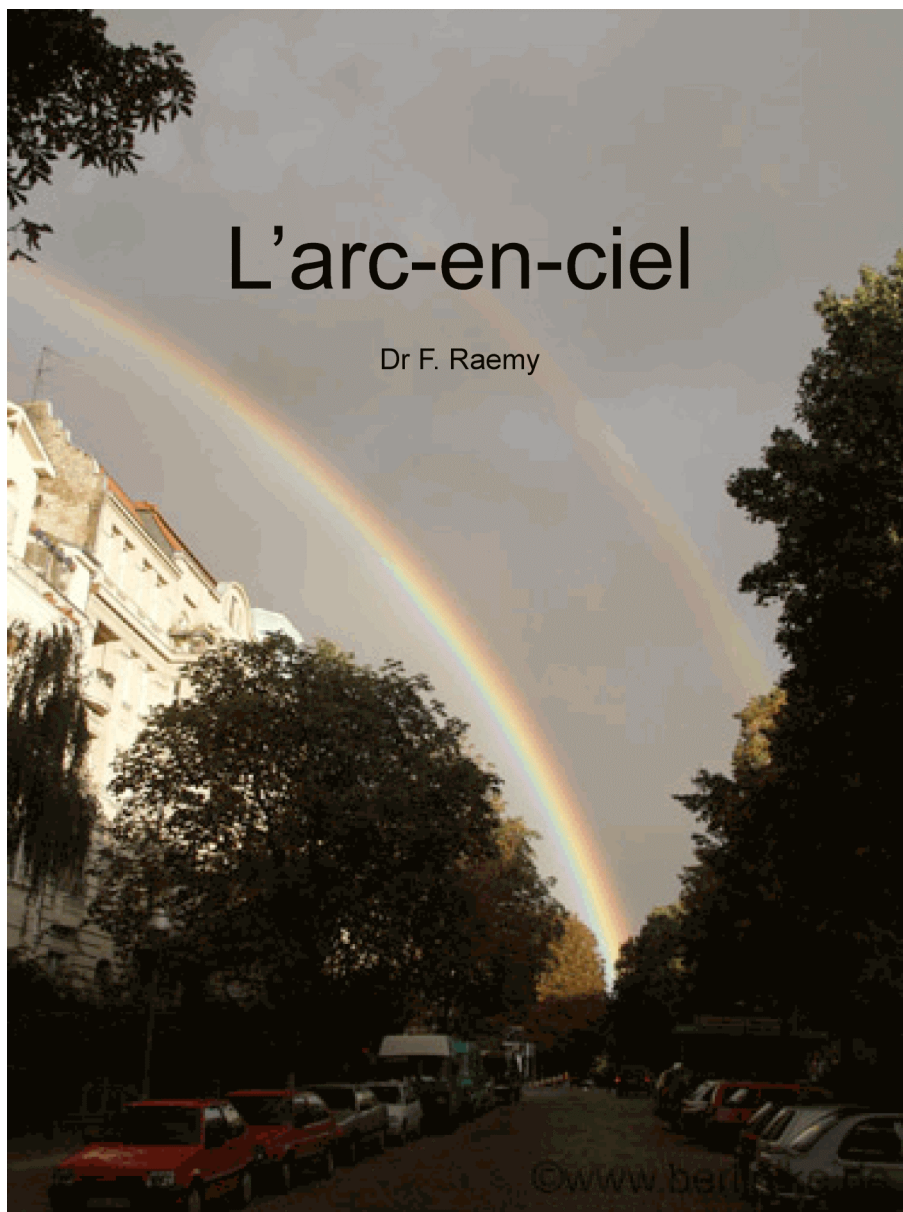


L'arc-en-ciel

Dr F. Raemy



©www.berlin.de

Théorie de l'arc-en-ciel

Un rayon de lumière blanche dans l'air sec qui tombe sur une couche d'air humide montre l'effet de la réflexion et de la réfraction entre les deux milieux. L'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion (mesuré par rapport à la normale à la surface). La partie de la lumière blanche directement réfléchiée est blanche et ne nous intéresse pas.



La loi de la réflexion

$$\alpha_{d'incidence} = \alpha_{de\ réflexion}$$

Une partie de l'intensité du rayon incident est réfractée à la surface de chaque gouttelette. A l'intérieur de la gouttelette le rayon est réfléchi une ou deux fois avant d'être réfracté dans le premier milieu de l'air sec. L'arc-en-ciel se base sur la réfraction double et sur une ou deux réflexions à l'intérieur de la gouttelette. L'angle de réfraction varie en fonction de la couleur, donc de la longueur d'onde. Ce phénomène est appelé dispersion. La dispersion se base sur le fait que la vitesse de la lumière à l'intérieur de la matière dépend de la longueur d'onde. Ainsi la lumière blanche est décomposée et l'observateur voit toutes les couleurs du spectre.

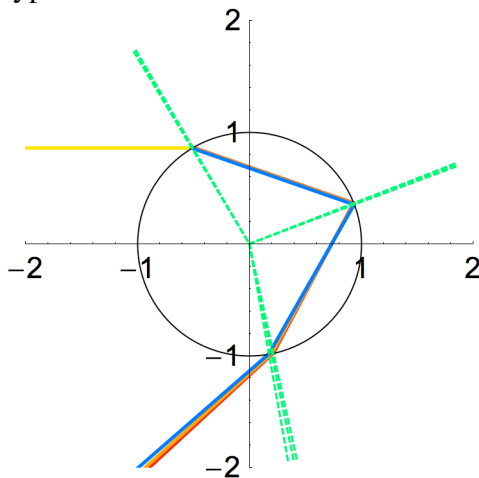
Si l'on définit l'indice de réfraction par $n = \frac{v_{vide}}{v_{milieu}} = \frac{c}{v}$, $c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ qui définit le rapport de la vitesse de propagation de la lumière dans le vide par rapport à celle dans un milieu transparent v , la connaissance de l'angle α dans le premier milieu permet le calcul de l'angle de réfraction β dans le deuxième milieu selon la loi de Snell.

La loi de la réfraction

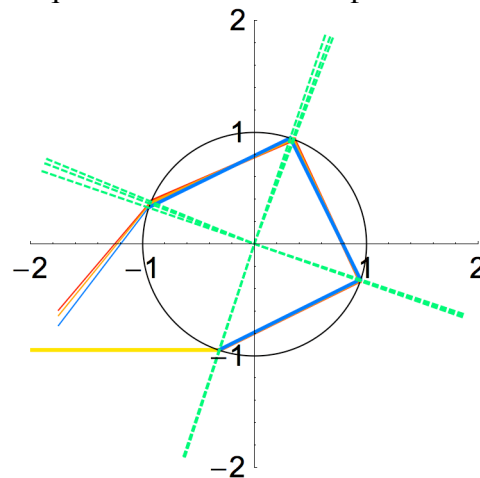
$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \cdot \sin \alpha\right)$$

Dans l'air sec l'indice de réfraction vaut $n_1 = 1,000272$, cela veut dire que la vitesse de propagation n'est qu'un peu plus petite que dans le vide. Dans de l'eau, l'indice de réfraction n_2 dépend de la couleur, donc de la longueur d'onde: $n_{bleu} = 1,340$; $n_{rouge} = 1,328$, ce qui provoque pour chaque rayon un chemin différent à l'intérieur de la gouttelette.

La photo ci-dessus montre l'arc-en-ciel principal et secondaire. Nous allons décrire les deux différents types d'arc-en-ciel. Nous étudions les figures suivantes qui montrent le chemin parcouru calculé.



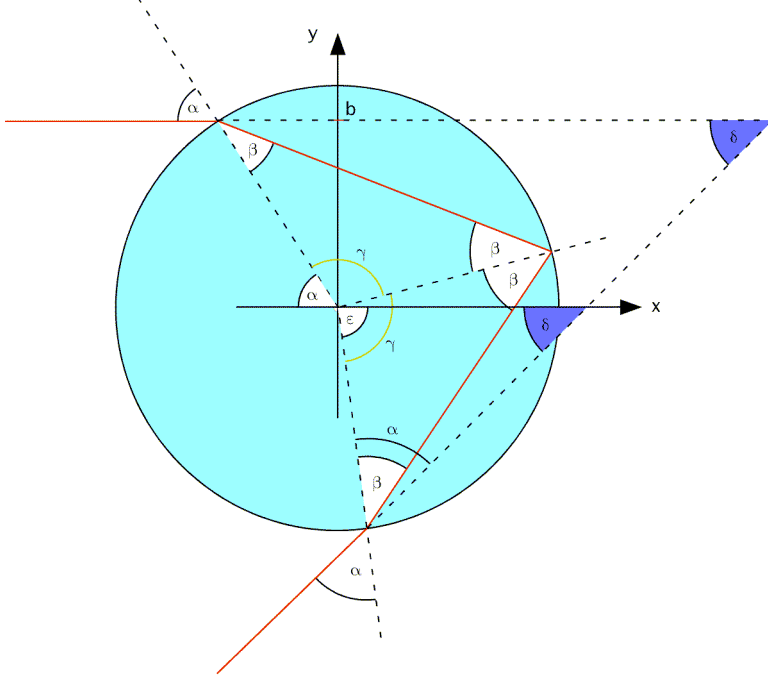
Chemin calculé parcouru à l'intérieur des gouttelettes de l'**arc-en-ciel primaire** avec réflexion simple



Chemin calculé parcouru à l'intérieur des gouttelettes de l'**arc-en-ciel secondaire** avec réflexion double

L'angle de déviation totale de l'arc-en-ciel principal et de l'arc-en-ciel secondaire

Les couleurs de l'arc-en-ciel ne sont que discernables si l'angle de déviation δ entre le rayon incident blanc et les rayons en couleurs, deux fois réfractés et une fois réfléchis est maximal. Un rayon parallèle à l'axe des x qui tombe sur la sphère (cercle) modifie l'angle de déviation total en fonction de la coordonnée à l'origine b . Un rayon incident sur l'axe des x serait réfléchi en direction de l'axe des x et ne pourrait pas engendrer des couleurs. La figure ci-dessous montre le chemin parcouru des rayons lumineux dans les gouttelettes de l'arc-en-ciel principal et de l'arc-en-ciel secondaire.



Si l'on exige que l'angle de déviation totale en fonction de la coordonnée à l'origine soit maximal, on doit d'abord déterminer la fonction $\delta(b)$.

$$\delta = 180^\circ - (\varepsilon + \alpha)$$

Dans l'arc-en-ciel principal et secondaire, l'angle ε est défini de la façon suivante.

l'arc-en-ciel principal

$$\varepsilon = \alpha + 2\gamma - 180^\circ$$

l'arc-en-ciel secondaire

$$\varepsilon = \alpha + 2\gamma - 180^\circ$$

Pour l'arc-en-ciel principal et l'arc-en-ciel secondaire on obtient:

$$\delta = 4\beta - 2\alpha$$

$$\delta = -180^\circ + 6\beta - 2\alpha$$

La loi de réfraction fournit:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \frac{b}{r}\right)$$

L'angle α est défini par:

$$\sin \alpha = \frac{b}{r} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{b}{r}\right)$$

L'angle de déviation totale $\delta(b)$ en cas de l'arc-en-ciel principal et en cas de l'arc-en-ciel secondaire est:

$$\delta(b) = 4 \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \frac{b}{r}\right) - 2 \arcsin\left(\frac{b}{r}\right)$$

$$\delta(b) = -180^\circ + 6 \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \frac{b}{r}\right) - 2 \arcsin\left(\frac{b}{r}\right)$$

Le maximum de la fonction $\delta(b)$ par optimisation

Nous cherchons le maximum de la fonction $\delta(b)$ en cas de l'arc-en-ciel principal et secondaire. Nous dérivons la fonction:

$$\delta'(b) = 4 \frac{\left(\frac{n_1}{n_2 r}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1 b}{n_2 r}\right)^2}} - 2 \frac{\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2}}$$

$$\delta'(b) = 6 \frac{\left(\frac{n_1}{n_2 r}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1 b}{n_2 r}\right)^2}} - 2 \frac{\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2}}$$

En égalisant la dérivée à zéro, on obtient l'ordonnée à l'origine b représentant une valeur pour laquelle l'angle de déviation totale devient maximal.

$$\begin{aligned} \delta'(b) &= 4 \frac{\left(\frac{n_1}{n_2 r}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1 b}{n_2 r}\right)^2}} - 2 \frac{\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2}} = 0 \\ \Rightarrow 2 \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1 b}{n_2 r}\right)^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2}} \\ \Rightarrow 2 \left(\frac{n_1}{n_2}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2} &= \sqrt{1 - \left(\frac{n_1 b}{n_2 r}\right)^2} \\ \Rightarrow 4 \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2\right) &= 1 - \left(\frac{n_1 b}{n_2 r}\right)^2 \\ \Rightarrow 3 \left(\frac{n_1 b}{n_2 r}\right)^2 &= 4 \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 - 1 \\ \Rightarrow b &= \frac{r}{n_1} \sqrt{\frac{4n_1^2 - n_2^2}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta'(b) &= 6 \frac{\left(\frac{n_1}{n_2 r}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1 b}{n_2 r}\right)^2}} - 2 \frac{\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2}} = 0 \\ \Rightarrow 3 \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1 b}{n_2 r}\right)^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2}} \\ \Rightarrow 3 \left(\frac{n_1}{n_2}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2} &= \sqrt{1 - \left(\frac{n_1 b}{n_2 r}\right)^2} \\ \Rightarrow 9 \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2\right) &= 1 - \left(\frac{n_1 b}{n_2 r}\right)^2 \\ \Rightarrow 8 \left(\frac{n_1 b}{n_2 r}\right)^2 &= 9 \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 - 1 \\ \Rightarrow b &= \frac{r}{n_1} \sqrt{\frac{9n_1^2 - n_2^2}{8}} \end{aligned}$$

Les valeurs numériques de l'ordonnée à l'origine pour l'arc-en-ciel principal et secondaire pour un rayon du cercle de $r = 1$ sont:

Couleur	indice de réfraction	l'ordonnée à l'origine de l'arc-en-ciel primaire	l'ordonnée à l'origine de l'arc-en-ciel secondaire
rouge:	$n = 1,32889$	$\Rightarrow b = 0,863136$	$\Rightarrow b = -0,950987$
jaune:	$n = 1,333$	$\Rightarrow b = 0,861022$	$\Rightarrow b = -0,950268$
vert:	$n = 1,3371$	$\Rightarrow b = 0,858902$	$\Rightarrow b = -0,949548$
bleu:	$n = 1,3403$	$\Rightarrow b = 0,857238$	$\Rightarrow b = -0,948985$

Les deux valeurs de b fournissent les angles maximales de déviation:

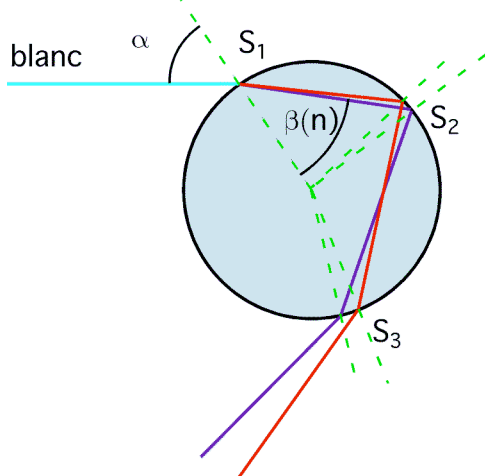
	de l'arc-en-ciel primaire	de l'arc-en-ciel secondaire
rouge:	$\delta(b = 0,863136) = 42,7328^\circ$	$\delta(b = -0,950987) = 49,7117^\circ$
jaune:	$\delta(b = 0,861022) = 42,1308^\circ$	$\delta(b = -0,950268) = 50,7957^\circ$
vert:	$\delta(b = 0,858902) = 41,5379^\circ$	$\delta(b = -0,949548) = 51,8653^\circ$
bleu:	$\delta(b = 0,857238) = 41,0802^\circ$	$\delta(b = -0,948985) = 52,6922^\circ$

L'arc-en-ciel principal se présente à peu près sous un angle de 42 degrés et l'arc-en-ciel secondaire sous un angle de 51 degré.

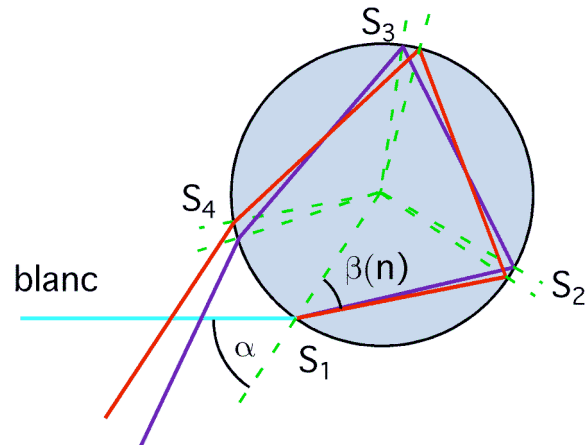
Arc-en-ciel principal et arc-en-ciel secondaire

Les deux figures suivantes montrent la réfraction et la réflexion simple ou double des rayons à l'intérieur d'une gouttelette. Les lignes en pointillé représentent les normales à la surface des sphères (au cercle). Elles sont utiles pour le calcul de l'angle d'incidence et l'angle de réfraction en cas de réfraction et pour le calcul de l'angle de réflexion en cas de réflexion. En cas de réflexion l'angle d'incidence et l'angle de réflexion sont identiques.

L'arc-en-ciel secondaire comporte la double réflexion à l'intérieur des gouttelettes. La réflexion simple caractérise l'arc-en-ciel primaire. L'intensité des couleurs est plus grande dans le spectre de l'arc-en-ciel primaire. Veuillez noter l'ordre inverse des couleurs. D'une façon plus claire, les deux figures suivantes montrent les chemins qui se croisent parcourus par les rayons de couleurs différentes à l'intérieur des gouttelettes.



Chemin parcouru par les rayons à l'intérieur d'une gouttelette de l'**arc-en-ciel primaire** avec réflexion simple

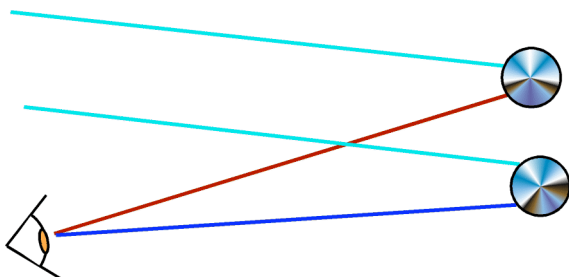


Chemin parcouru par les rayons à l'intérieur d'une gouttelette de l'**arc-en-ciel secondaire** avec réflexion double

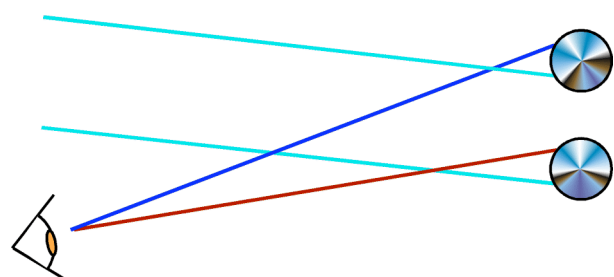
Dans la figure de droite, la réfraction a lieu aux points S_1 et S_4 , dans la figure de gauche aux points S_1 et S_3 . Dans la figure de droite, la réflexion se fait aux points S_2 et S_3 , dans la figure de gauche on ne trouve qu'une seule réflexion au point S_2 .

La suite des couleurs de l'arc-en-ciel principal et de l'arc-en-ciel secondaire

Pour que les rayons de couleur rouge et de couleur bleue arrivent en même temps à l'œil, on doit exiger que la gouttelette qui réfléchit la couleur rouge soit située plus haut que la gouttelette qui réfléchit la couleur bleue. Ce qui fait que, dans l'arc-en-ciel primaire, la couleur rouge se trouve plus haut que la couleur bleue. Dans l'arc-en-ciel secondaire, la suite des couleurs est inversée. La couleur bleue est située plus haut que la couleur rouge parce que les rayons sont deux fois réfléchis.



Couleurs dans l'arc-en-ciel primaire
rouge en haut et bleu en bas



Couleurs dans l'arc-en-ciel secondaire
bleu en haut, rouge en bas