

Eine weitere Lösungsmöglichkeit der Aufgabe 1 Serie 7 Algebra

1 a) $\frac{4}{x-1} > 1$ $D_x = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Idee:

Wir subtrahieren die rechte Seite der Ungleichung und erhalten so auf der rechten Seite eine Null.

$$\frac{4}{x-1} > 1 \quad | -1 \Rightarrow \frac{4}{x-1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{4}{x-1} - \frac{x-1}{x-1} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{4}{(x-1)} - \frac{(x-1)}{(x-1)} > 0 \Rightarrow \frac{4-(x-1)}{(x-1)} > 0 \Rightarrow \frac{5-x}{(x-1)} > 0$$

Bemerkung:

Die Division von zwei Zahlen ist dann positiv, wenn entweder beide Zahlen positiv oder beide Zahlen negativ sind. Hier wird verständlich, warum rechts eine Null stehen sollte.

$\frac{A}{B} > 0$
1. Fall: $A > 0 \wedge B > 0$ \vee 2. Fall: $A < 0 \wedge B < 0$

Daraus lassen sich die beiden Fälle unterscheiden.

$\frac{5-x}{(x-1)} > 0$
1. Fall: $5-x > 0 \wedge x-1 > 0$ \vee 2. Fall: $5-x < 0 \wedge x-1 < 0$
$\Rightarrow 5 > x \wedge x > 1$ $5 < x \wedge x < 1$
$\Rightarrow 1 < x < 5$
$L_{x_1} = \{x \mid 1 < x < 5\}$ $L_{x_2} = \{ \}$

Zusammenfassung $\Rightarrow L_x = L_{x_1} \cup L_{x_2} = L_{x_1} = \{x \mid 1 < x < 5\}$

1 b) $\frac{2x}{x+1} \geq 1$ $D_x = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\frac{2x}{x+1} \geq 1 \quad | -1 \Rightarrow \frac{2x}{x+1} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{2x}{(x+1)} - \frac{(x+1)}{(x+1)} \geq 0 \Rightarrow \frac{2x-(x+1)}{(x+1)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{(x+1)} \geq 0$$

$\frac{A}{B} \geq 0$
1. Fall: $A \geq 0 \wedge B > 0$ \vee 2. Fall: $A \leq 0 \wedge B < 0$

$\frac{x-1}{(x+1)} \geq 0$
1. Fall: $x-1 \geq 0 \wedge x+1 > 0$ \vee 2. Fall: $x-1 \leq 0 \wedge x+1 < 0$
$\Rightarrow x \geq 1 \wedge x > -1$ $x \leq 1 \wedge x < -1$
$\Rightarrow L_{x_1} = \{x \mid x \geq 1\}$ $L_{x_2} = \{x \mid x < -1\}$

Zusammenfassung: $\Rightarrow L_x = L_{x_1} \cup L_{x_2} = L_{x_1} = \{x \mid x \geq 1 \vee x < -1\}$

1 c) $\frac{2x+3}{3x-5} > 4$ $D_x = \mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{3}\}$

$$\frac{2x+3}{3x-5} > 4 \quad | -4 \Rightarrow \frac{2x+3}{(3x-5)} - 4 > 0 \Rightarrow \frac{2x+3}{(3x-5)} - \frac{4(3x-5)}{(3x-5)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x+3-12x+20}{(3x-5)} > 0 \Rightarrow \frac{23-10x}{(3x-5)} > 0$$

1. Fall $23-10x > 0 \wedge (3x-5) > 0$	2. Fall $23-10x < 0 \wedge (3x-5) < 0$
$\Rightarrow 23 > 10x \quad \wedge 3x > 5$	$23 < 10x \quad \wedge 3x < 5$
$\Rightarrow x < \frac{23}{10} \quad \wedge x > \frac{5}{3}$	$x > \frac{23}{10} \quad \wedge x < \frac{5}{3}$
$\Rightarrow L_{x_1} = \left\{ x \mid \frac{5}{3} < x < \frac{23}{10} \right\}$	$L_{x_2} = \{ \}$

Zusammenfassung: $\Rightarrow L_x = L_{x_1} \cup L_{x_2} = L_{x_1} = \left\{ x \mid \frac{5}{3} < x < \frac{23}{10} \right\}$

1 d) $\frac{2}{x-2} \leq \frac{3}{x}$ $D_x = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$

$$\frac{2}{x-2} \leq \frac{3}{x} \quad | -\frac{3}{x} \Rightarrow \frac{2}{x-2} - \frac{3}{x} \leq 0 \Rightarrow \frac{2x-3(x-2)}{(x-2)x} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{6-x}{(x-2)x} \leq 0$$

1. Fall $6-x \geq 0 \wedge (x-2)x < 0$	2. Fall $6-x \leq 0 \wedge (x-2)x > 0$
$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{6 \geq x \wedge x-2 > 0 \wedge x < 0} \\ \vee \boxed{6 \geq x \wedge x-2 < 0 \wedge x > 0} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{6 \leq x \wedge x-2 > 0 \wedge x > 0} \\ \vee \boxed{6 \leq x \wedge x-2 < 0 \wedge x < 0} \end{array} \right.$
$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{6 \geq x \wedge x > 2 \wedge x < 0} \\ \vee \boxed{6 \geq x \wedge x < 2 \wedge x > 0} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{6 \leq x \wedge x > 2 \wedge x > 0} \\ \vee \boxed{6 \leq x \wedge x < 2 \wedge x < 0} \end{array} \right.$
$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} L_{x_{11}} = \{ \} \\ \vee L_{x_{12}} = \{x \mid 0 < x < 2\} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} L_{x_{21}} = \{x \mid x \geq 6\} \\ \vee L_{x_{22}} = \{ \} \end{array} \right.$

Zusammenfassung: $L_x = L_{x_{11}} \cup L_{x_{12}} \cup L_{x_{21}} \cup L_{x_{22}} = \{x \mid 0 < x < 2 \vee x \geq 6\}$

$$1 e) \quad \frac{x+2}{x} > \frac{x}{x-2} \quad D_x = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$$

$$\frac{x+2}{x} > \frac{x}{x-2} \quad | -\frac{x}{x-2} \quad \Rightarrow \frac{x+2}{x} - \frac{x}{x-2} > 0 \quad \Rightarrow \frac{(x+2)(x-2) - x^2}{x(x-2)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{x(x-2)} > 0 \quad \Rightarrow \quad x(x-2) < 0$$

$$1. \text{Fall } x < 0 \wedge x - 2 > 0 \quad \vee \quad 2. \text{Fall } x > 0 \wedge x - 2 < 0$$

$$\Rightarrow x < 0 \wedge x > 2 \quad \quad \quad x > 0 \wedge x < 2$$

$$\Rightarrow L_{x_1} = \{ \} \quad \quad \quad L_{x_2} = \{x \mid 0 < x < 2\}$$

$$\text{Zusammenfassung : } \Rightarrow \quad \boxed{L_x = L_{x_1} \cup L_{x_2} = L_{x_1} = \{x \mid 0 < x < 2\}}$$