Exercice 10 de la série 13, géométrie

donné:

Un point qui n'est pas élément de la droite g: $P(4;-2;2) \notin g$

$$g: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad g: \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{u}$$

g = droite

$\vec{r}$ = Point quelconque de la droite dépendant du paramètre t ;

$\vec{r}_0$ = Un point de soutien de la droite, dans l'exemple c'est $P_0(-2;2;1)$.

$\vec{u}$ = Un vecteur directeur de la droite

Dans l'esquisse on trouve

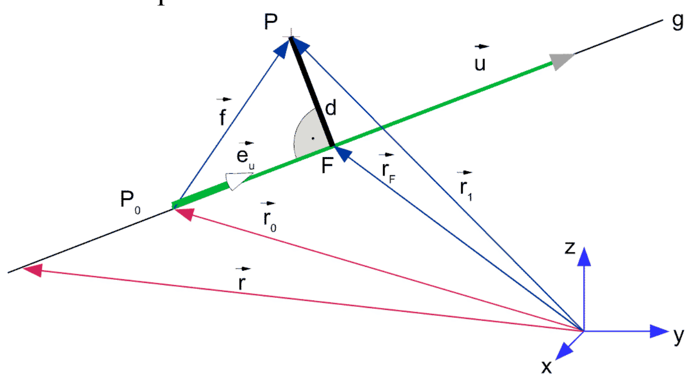
F = pied de la hauteur d

$\vec{e}_u$ = vecteur unitaire en direction du vecteur $\vec{u}$

$\vec{f} = \overrightarrow{P_0P}$

chérché: $d = \overline{PF}$

Solution: l'esquisse



1. **Possibilité de la solution**

$d = \left|(\vec{r}_1 - \vec{r}_F)\right| \quad \wedge \quad \vec{r}_F = \vec{r}_0 + k \cdot \vec{e}_u$

Déterminer k

$$\overline{P_0F} = k \cdot |\vec{e}_u| = k = \vec{f} \cdot \vec{e}_u = \vec{f} \cdot \frac{\vec{u}}{u} \quad \wedge \quad \vec{f} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$$

numériquement:

$$\vec{f} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \vec{e}_u := \frac{\vec{u}}{u} = \frac{1}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-2)^2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

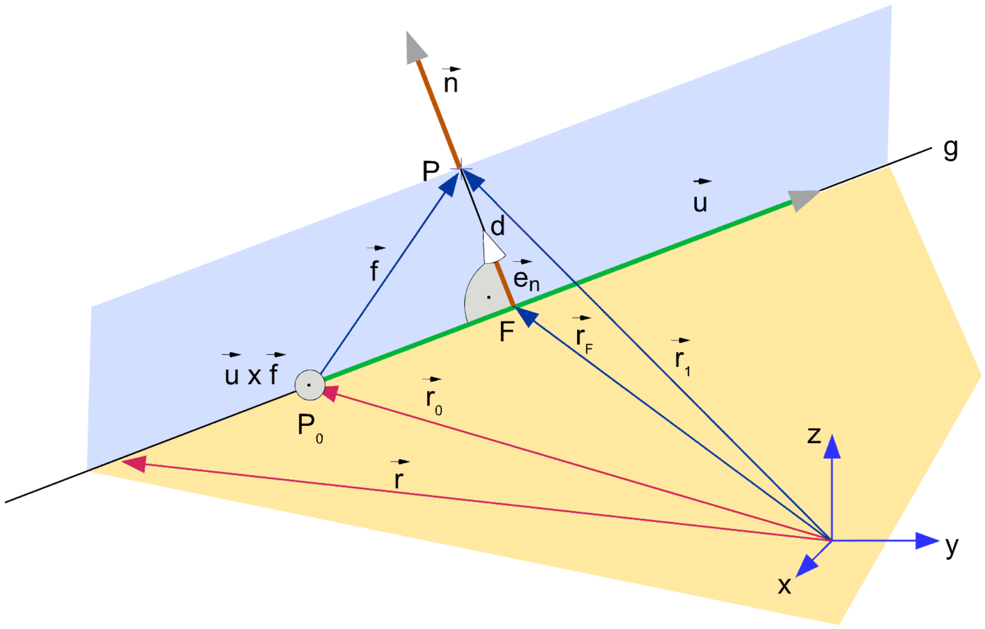
$$\Rightarrow \overline{P_0F} = k = \vec{f} \cdot \frac{\vec{u}}{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{12 - 4 - 2}{3} = 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{k = 2}}$$

Déterminer F et puis $d = \overline{PF}$

$$\vec{r}_F = \vec{r}_0 + k \cdot \vec{e}_u = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{3} + \frac{4}{3} \\ \frac{6}{3} + \frac{2}{3} \\ \frac{3}{3} - \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$d = \left|(\vec{r}_1 - \vec{r}_F)\right| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \frac{12+2}{3} \\ \frac{-6-8}{3} \\ \frac{6+1}{3} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\left(\frac{14}{3}\right)^2 + \left(\frac{-14}{3}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^2} = \frac{21}{3} \Rightarrow \underline{\underline{d = 7}}$$

2. **Possibilité de la solution**



La distance du point P de la droite est la projection du vecteur f en direction du vecteur normal unitaire à la droite qui passe par le point P. La distance d est l'ombre engendré par le vecteur $\vec{f}$ en direction du vecteur normal $\vec{n}$.

$$d = \left|\vec{f} \cdot \vec{e}_n\right| \qquad \wedge \qquad \vec{f} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$$

$$\vec{n} = \left(\vec{u} \times \vec{f}\right) \times \vec{u} \qquad \wedge \qquad \vec{e}_n = \frac{\vec{n}}{n}$$

La solution numérique :

$$\vec{f} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\vec{u} \times \vec{f}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-8 \\ -12-2 \\ -8-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -14 \\ -14 \end{pmatrix}$$

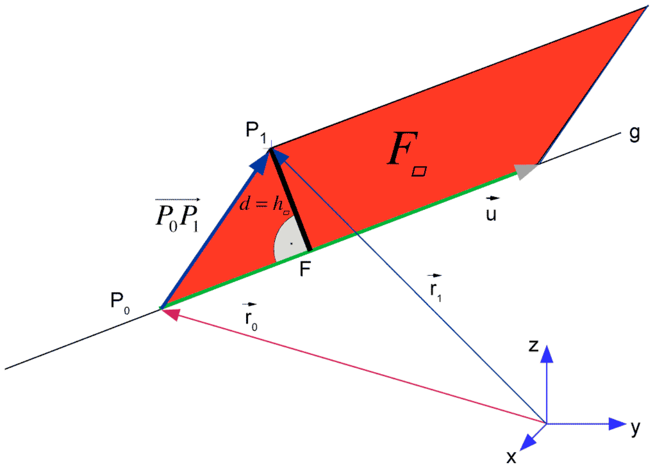
$$\Rightarrow \quad \vec{n} = \left(\vec{u} \times \vec{f}\right) \times \vec{u} = \begin{pmatrix} -7 \\ -14 \\ -14 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28+14 \\ -28-14 \\ -7+28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ -42 \\ 21 \end{pmatrix} \quad \vee \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{e}_n = \frac{\vec{n}}{n} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$d = \left|\vec{f} \cdot \vec{e}_n\right| = \left|\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}\right| = 4 + \frac{8}{3} + \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{d = 7}}$$

3. **Possibilité de la solution**

Explication: $P_0 \in g;\ P_1 \notin g;$ $g:$ $\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{u}$; $\vec{u} = vecteur\ directeur$



Raisonnement

Parce que l'aire de la surface du parallélogramme est égale à la distance d fois la longueur du vecteur directeur de la droite, on obtient la distance d, en divisant l'aire par la longueur du côté u.

$$F_\square = \left|\overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{u}\right| = \left|\overrightarrow{P_0P_1}\right|\left|\vec{u}\right|\sin\alpha = h_\square \cdot u \qquad \Rightarrow \qquad d = \frac{F_\square}{u} = \frac{\left|\overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{u}\right|}{u} = \frac{\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right| \cdot \left|\vec{u}\right| \cdot \sin\alpha}{u} = h_\square$$

La formule de la distance du point P_1 de la droite g

$$\Rightarrow \qquad \boxed{d = \frac{\left|\overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \frac{\left|(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times \vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|}}$$

numériquement

$$\Rightarrow \qquad d = \frac{\left|(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times \vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \frac{\left|\left[\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right|}{3} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right|}{3} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 14 \end{pmatrix}\right|}{3}$$

$$\Rightarrow \qquad d = \frac{\sqrt{49 + 196 + 196}}{3} = \frac{21}{3}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{d = 7}}$$