Aufgabe 10 der Serie 13 Geometrie

Gegeben:

Ein Punkt, der nicht auf der Geraden g liegt: $P(4;-2;2) \notin g$

$$g: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad g: \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{u}$$

g = Gerade

$\vec{r}$ = Laufpunkt auf der Geraden, abhängig vom Parameter t;

$\vec{r}_0$ = Ein gegebener Stützpunktvektor, wobei $P_0(-2;2;1)$ der Stützpunkt ist.

$\vec{u}$ = Richtungsvektor der Geraden

In der Zeichnung gelten die Bezeichnungen

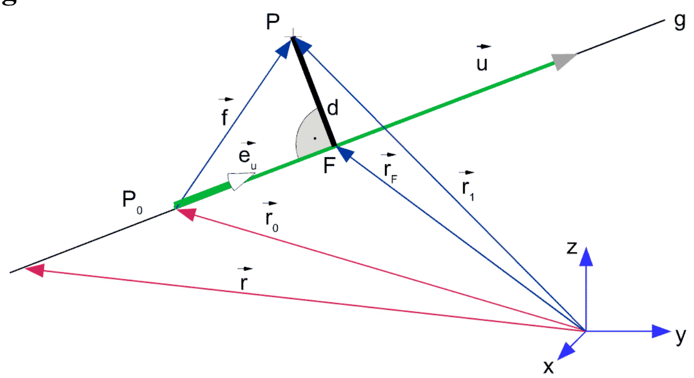
F = Fusspunkt

$\vec{e}_u$ = Einheitsvektor in Richung von $\vec{u}$

$\vec{f} = \overrightarrow{P_0P}$

Gesucht: $d = \overline{PF}$

Lösung: Skizze



1. **Lösungsmöglichkeit**

$d = \left|(\vec{r}_1 - \vec{r}_F)\right| \quad \wedge \quad \vec{r}_F = \vec{r}_0 + k \cdot \vec{e}_u$

Bestimmung von k

$$\overline{P_0F} = k \cdot |\vec{e}_u| = k = \vec{f} \cdot \vec{e}_u = \vec{f} \cdot \frac{\vec{u}}{u} \quad \wedge \quad \vec{f} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$$

numerisch:

$$\vec{f} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \vec{e}_u := \frac{\vec{u}}{u} = \frac{1}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-2)^2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

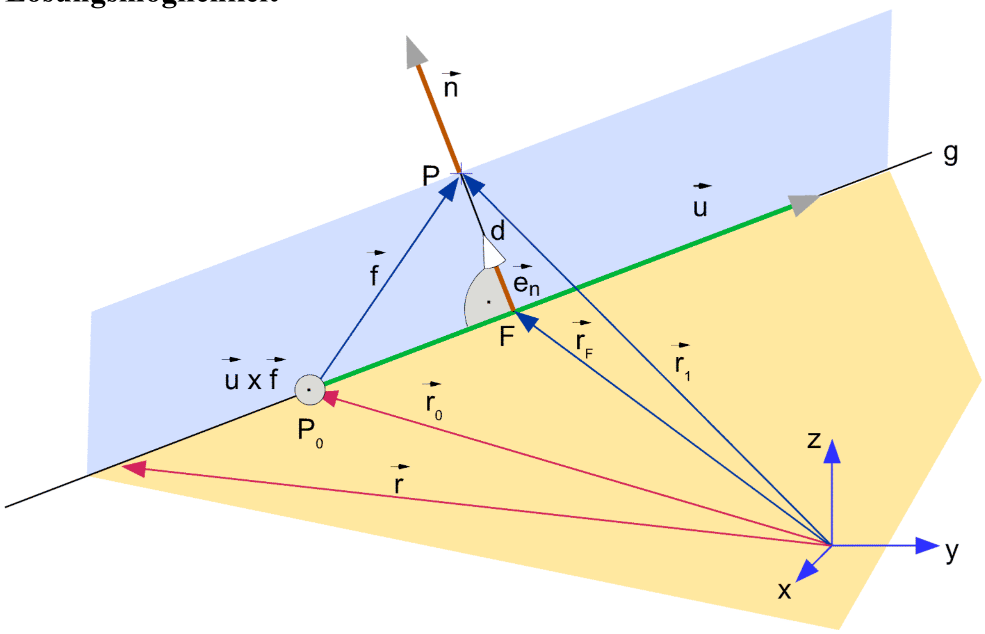
$$\Rightarrow \overline{P_0F} = k = \vec{f} \cdot \frac{\vec{u}}{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{12 - 4 - 2}{3} = 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{k = 2}}$$

Bestimmung des Punktes F und daraus den Abstand $d = \overline{PF}$

$$\vec{r}_F = \vec{r}_0 + k \cdot \vec{e}_u = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{3} + \frac{4}{3} \\ \frac{6}{3} + \frac{2}{3} \\ \frac{3}{3} - \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$d = \left|(\vec{r}_1 - \vec{r}_F)\right| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \frac{12+2}{3} \\ \frac{-6-8}{3} \\ \frac{6+1}{3} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\left(\frac{14}{3}\right)^2 + \left(\frac{-14}{3}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^2} = \frac{21}{3} \Rightarrow \underline{\underline{d = 7}}$$

2. **Lösungsmöglichkeit**



Der Abstand des Punktes P von der Geraden ist die Projektion des Vektors $\vec{f}$ auf den Einheits-Normalenvektor zur Geraden, der durch P verläuft. Geometrisch ist der Abstand die Schattenlänge des Vektors $\vec{f}$ in Richtung des Normalenvektors $\vec{n}$.

$$d = \left|\vec{f}\cdot\vec{e}_n\right| \qquad \wedge \qquad \vec{f} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$$

$$\vec{n} = \left(\vec{u}\times\vec{f}\right)\times\vec{u} \qquad \wedge \qquad \vec{e}_n = \frac{\vec{n}}{n}$$

Die numerische Lösung:

$$\vec{f} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = \begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-4\\1\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \left(\vec{u}\times\vec{f}\right) = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}6\\-4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-8\\-12-2\\-8-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\-14\\-14\end{pmatrix}$$

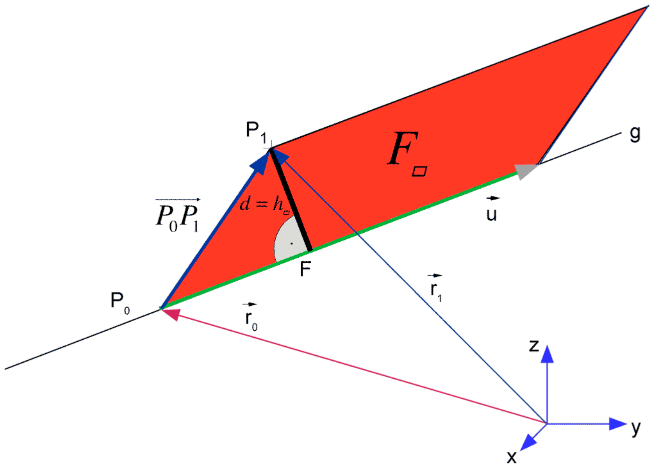
$$\Rightarrow \quad \vec{n} = \left(\vec{u}\times\vec{f}\right)\times\vec{u} = \begin{pmatrix}-7\\-14\\-14\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}28+14\\-28-14\\-7+28\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}42\\-42\\21\end{pmatrix} \quad\vee\quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{e}_n = \frac{\vec{n}}{n} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$d = \left|\vec{f}\cdot\vec{e}_n\right| = \left|\begin{pmatrix}6\\-4\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}\right| = 4 + \frac{8}{3} + \frac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{d = 7}}$$

3. **Lösungsmöglichkeit**

Erklärung: $P_0 \in g;\ P_1 \notin g;$ $\quad g: \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{u}\ ; \quad \vec{u} = Richtungsvektor$



Begründung
Weil die Fläche des Parallelogramms gleich dem Abstand des Punktes mal der Länge des Richtungsvektors ist, kann der Abstand des Punktes von der Geraden durch Division der Fläche des Parallelogramms durch die Grundseite u bestimmt werden.

$$F_\square = \left|\overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{u}\right| = \left|\overrightarrow{P_0P_1}\right| \left|\vec{u}\right| \sin\alpha = h_\square \cdot u \qquad \Rightarrow \qquad d = \frac{F_\square}{u} = \frac{\left|\overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{u}\right|}{u} = \frac{\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right| \cdot \left|\vec{u}\right| \cdot \sin\alpha}{u} = h_\square$$

Abstandsformel für den Abstand eines Punktes P_1 von der Geraden g

$$\Rightarrow \qquad \boxed{d = \frac{\left|\overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \frac{\left|(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times \vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|}}$$

Numerisch

$$\Rightarrow \qquad d = \frac{\left|(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times \vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \frac{\left|\left[\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right|}{3} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right|}{3} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 14 \end{pmatrix}\right|}{3}$$

$$\Rightarrow \qquad d = \frac{\sqrt{49 + 196 + 196}}{3} = \frac{21}{3}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{d = 7}}$$